

頑石點頭

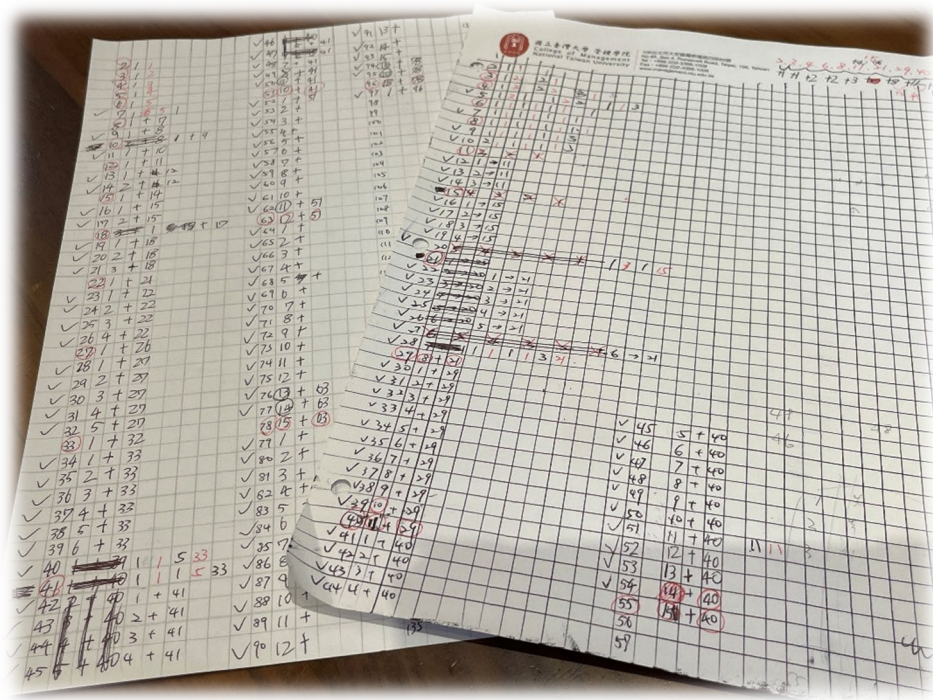


【問題一】 一堆石頭有 50 個，兩人輪流取石，每次每人至少取一個，最多取上次對方取走的石頭數的 3 倍。取走最後一個石頭的人贏得勝利。(第一次取石不可以取完全部石頭，請以文字及表格說明這個遊戲的必勝關鍵及取勝關鍵。)

解答：

我們一開始在進行遊戲的時候，使用了家裡的圍棋代替石頭，開始進行兩個人輪流取石的遊戲，後來逐漸發現，應該要從數字小的石頭堆數量開始，用反向推導的方式測試到最後一堆石頭是 50 個，嘗試找出面對各種不同的石頭數字堆並輪流取石的情況下，是否有甚麼規律出現。並且透過

製作取石紀錄表格(如下圖)，找到先手跟後手在取石的時候應該要如何取石頭，才能盡量取得拿到最後一顆石頭的優勢。



透過逐一記錄先手、後手取的數字，發現在取石的時候，只要小心謹慎的取石，不亂取，要想辦法讓對手取得「必敗數字」，則就有機會「必勝」！

像是在第一題中，因為每次每人最少取一顆，最多取上次對手取走石頭數的 3 倍，因此發現，取石頭的數字不能一次取太多，否則很容易最後一顆石頭就在對手放大 3 倍數字後取走，所以我們從小數字開始推導，發現當某些數字的石頭堆出現石，會使後手的人必勝，而這些數字就成了先手的「必敗數字」。

因為剩石 1 顆，就是先手直接獲勝，因此排除討論範圍。推倒當剩石數量分別為 2,3,4 時，先手不論如何取，都必定是後手獲勝。以【先手取石數、後手取石數】表示為【1,1】【1,2】【2,1】

【1,3】【2,2】【3,1】這些結果，都會是後手勝利，因此 2,3,4 都是「必敗數字」，而出現的必敗數字我們用 X1,X2,X3...進行排序編號。

繼續往下推導 5 顆石頭時，則先手只要先取 1 或 3 顆，則一定會取得最後一顆石頭因而獲勝。以【先手取石數、後手取石數、先手取石數】來表示【1,1,3】【1,2,2】【1,3,1】以上這些取法，就會讓先手必勝。

推導 6 顆石頭時，先手除了因為不能取 2 顆以上，否則後手可以直接取走剩餘石頭，導致先手輸。即使先手僅取 1 顆，則會讓後手面對剩餘 5 顆石頭的狀態，變成上面所推導的例子，後手直接必勝。因此在 6 顆石頭時，就變成先手的必敗數字，我們也可以將 6 編號為 X4。

而從 6~50 的數字，全數推導的說明以及會讓先手面對必敗的數字都標記在下方表格，而必敗的石頭數則採用紅色字體標誌，並且依排序進行編號，從 X1 編至 X11(剩石數字為 40)。

剩石數量	先手取石數	後手取石數	勝者	補充說明	必敗數字編號
1	直接獲勝				
2	1	1	後		X1
3	1	2	後		X2
4	1	3	後		X3
5	1,3	1	先		
6	1	(5)	後	先手不可取含2以上數字，取1則後手得必勝組合5	X4
7	1	(6)	先	先手拿1，讓後手面對必敗組合6	
8	1	(7)	後	先手不可取含2以上數字，取1則後手得必勝組合7	X5
9	1	(8)	先	先手拿1，讓後手面對必敗組合8	
10	2	(8)	先	先手拿2，讓後手面對必敗組合8	
11	(3)	(8)	後	不論先手取1或2，後手均可取得必勝組合；亦可解讀為先手取石組合無法成功讓後手取得必敗組合	X6
12	1	(11)	先	先手拿1，讓後手面對必敗組合11	
13	2	(11)	先	先手拿2，讓後手面對必敗組合11	
14	3	(11)	先	先手拿3，讓後手面對必敗組合11	
15	(4)	(11)	後	不論先手取1,2,3，後手均可取得必勝組合；亦可解讀為先手取石組合無法成功讓後手取得必敗組合	X7
16	1	(15)	先	先手拿1，讓後手面對必敗組合15	
17	2	(15)	先	先手拿2，讓後手面對必敗組合15	
18	3	(15)	先	先手拿3，讓後手面對必敗組合15	
19	4	(15)	先	先手拿4，讓後手面對必敗組合15	
20	(5)	(15)	先	先手以必勝組合5，讓後手面臨必敗組合15	
21	(6)	(15)	後	不論先手取1,2,3,4,5，後手均可取得必勝組合；亦可解讀為先手取石組合無法成功讓後手取得必敗組合	X8
22	1	(21)	先	先手拿1，讓後手面對必敗組合21	
23	2	(21)	先	先手拿2，讓後手面對必敗組合21	
24	3	(21)	先	先手拿3，讓後手面對必敗組合21	
25	4	(21)	先	先手拿4，讓後手面對必敗組合21	
26	5	(21)	先	先手拿5，讓後手面對必敗組合21	
27	6	(21)	先	先手拿6，讓後手面對必敗組合21	
28	(7)	(21)	先	先手以必勝組合7，讓後手面臨必敗組合21	
29	(8)	(21)	後	先手取石組合無法成功讓後手取得必敗組合	X9
30	1	(29)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
31	2	(29)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
32	3	(29)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
33	4	(29)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
34	5	(29)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
35	6	(29)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
36	7	(29)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
37	8	(29)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
38	9	(29)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
39	(10)	(29)	先	先手以必勝組合，讓後手面臨必敗組合	
40	(11)	(29)	後	先手取石組合無法成功讓後手取得必敗組合	X10
41	1	(40)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
42	2	(40)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
43	3	(40)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
44	4	(40)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
45	5	(40)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
46	6	(40)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
47	7	(40)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
48	8	(40)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
49	9	(40)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
50	10	(40)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	

*)括號表示採用剩石數量的組合取石方式取石，舉例：(5)就是用上面5的取石法：【1,3,1】。

來表示【先手取石數、後手取石數、先手取石數】，在本題後面的(數字)以及後面題目也都適用此法

來表示。

在這個推導的結果找到必敗數字數列以及關係如下：

必敗 編號	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10
必敗 數字	2	3	4	6	8	11	15	21	29	40
數列 關係					6+2	8+3	11+4	15+6	21+8	29+11
數列 關係					X4+X1	X5+X2	X6+X3	X7+X4	X8+X5	X9+X6

因此發現 $X_n = X_{n-1} + X_{n-4}$ ，且 $n \geq 5$ 時公式才有效。

所以在這個規則遊戲中，先手只要在取石的過程中，想辦法讓後手落入必須面對必敗數字的情況下，則先手就會必勝！而必敗數字可以透過必敗數字列之間的關係公式逐步往後推導，所以當最開始一堆石頭有 50 顆，先手先取 10 顆，後手不論拿幾顆，輪到先手時，都要盡量讓剩石的數字再次變成必敗數字，這樣先手即可取得勝利！

【問題二】 一堆石頭有 100 個，兩人輪流取石，每次每人至少取一個，最多取上次對方取走的石頭數的 4 倍。取走最後一個石頭的人贏得勝利。(第一次取石不可以取完全部石頭，請以文字及表格說明這個遊戲的必勝關鍵及取勝關鍵。)

解答：

這次的遊戲規則改為最多取上次對手取走的石頭數 4 倍，有了第一題的經驗，這題同樣也是先跟爸爸一起藉由圍棋來思考以及用表格來記錄，從數字小的堆數來倒推到 100 個時候可能的必敗數字。



在經過逐一整理表格後，展開以下取勝的過程。

剩石數量	先手取石數	後手取石數	勝者	補充說明	必敗數字編號
1	直接獲勝				
2	1	1	後		X1
3	1	2	後		X2
4	1	3	後		X3
5	1	4	後		X4
6	1,4	1	先		
7	1	(6)	後	先手不可取2，取1則讓後手取得必勝組合6	X5
8	1	(7)	先	先手拿1，後手拿必敗數字7	
9	(2)	(7)	後	先手拿2，後手拿必敗數字7	X6
10	1	(9)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
11	2	(9)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
12	(3)	(9)	後	先手取石組合無法成功讓後手取得必敗組合	X7
13	1	(12)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
14	2	(12)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
15	(3)	(12)	後	先手取石組合無法成功讓後手取得必敗組合	X8
16	1	(15)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
17	2	(15)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
18	3	(15)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
19	(4)	(15)	先	先手取石組合無法成功讓後手取得必敗組合	X9
20	1	(19)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
21	2	(19)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
22	3	(19)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
23	4	(19)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
24	(5)	(19)	後	先手取石組合無法成功讓後手取得必敗組合	X10
25	1	(24)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
26	2	(24)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
27	3	(24)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
28	4	(24)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
29	5	(24)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
30	(6)	(24)	先	先手以必勝組合，讓後手面臨必敗組合	
31	(7)	(24)	後	先手取石組合無法成功讓後手取得必敗組合	X11
32	1	(31)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
33	2	(31)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
34	3	(31)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
35	4	(31)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
36	5	(31)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
37	6	(31)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
38	7	(31)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
39	(8)	(31)	先	先手以必勝組合，讓後手面臨必敗組合	
40	(9)	(31)	後	先手取石組合無法成功讓後手取得必敗組合	X12
41	1	(40)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
42	2	(40)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
43	3	(40)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
44	4	(40)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
45	5	(40)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
46	6	(40)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
47	7	(40)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
48	8	(40)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
49	9	(40)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
50	(10)	(40)	先	先手以必勝組合，讓後手面臨必敗組合	
51	(11)	(40)	先	先手以必勝組合，讓後手面臨必敗組合	
52	(12)	(40)	後	先手取石組合無法成功讓後手取得必敗組合	X13
53	1	(52)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
54	2	(52)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
55	3	(52)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
56	4	(52)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
57	5	(52)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
58	6	(52)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
59	7	(52)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
60	8	(52)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
61	9	(52)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
62	10	(52)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
63	11	(52)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
64	12	(52)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
65	(13)	(52)	先	先手以必勝組合，讓後手面臨必敗組合	
66	(14)	(52)	先	先手以必勝組合，讓後手面臨必敗組合	
67	(15)	(52)	後	先手取石組合無法成功讓後手取得必敗組合	X14
68	1	(67)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
69	2	(67)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
70	3	(67)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
71	4	(67)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
72	5	(67)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
73	6	(67)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
74	7	(67)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
75	8	(67)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
76	9	(67)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
77	10	(67)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
78	11	(67)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
79	12	(67)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
80	13	(67)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
81	14	(67)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
82	15	(67)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
83	16	(67)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
84	(17)	(67)	先	先手以必勝組合，讓後手面臨必敗組合	
85	(18)	(67)	先	先手以必勝組合，讓後手面臨必敗組合	
86	(19)	(67)	後	先手取石組合無法成功讓後手取得必敗組合	X15
87	1	(86)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
88	2	(86)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
89	3	(86)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
90	4	(86)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
91	5	(86)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
92	6	(86)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
93	7	(86)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
94	8	(86)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
95	9	(86)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
96	10	(86)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
97	11	(86)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
98	12	(86)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
99	13	(86)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
100	14	(86)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	

必敗 編號	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
必敗 數字	2	3	4	5	7	9	12	15
數列 關係								12+3
數列 關係								X7+X2
必敗 編號	X9	X10	X11	X12	X13	X14	X15	
必敗 數字	19	24	31	40	52	67	86	
數列 關係	15+4	19+5	24+7	31+9	40+12	52+15	67+19	
數列 關係	X8+X3	X9+X4	X10+X5	X11+X6	X12+X7	X13+X8	X14+X9	

因此發現 $X_n = X_{n-1} + X_{n-6}$ ，且 $n \geq 8$ 時公式才有效。

所以在這個規則遊戲中，先手只要在取石的過程中，想辦法讓後手落入必須面對必敗數字的情況下，則先手就會必勝！而必敗數字可以透過這次新發現的必敗數字列之間的關係公式逐步往後推導，所以當最開始一堆石頭有 100 顆時，先手先取 14 顆，後手不論拿幾顆，輪到先手時，都要盡量讓剩石的數字變成下一個必敗數字，這樣先手即可取得勝利！

【問題三】 一堆石頭有 200 個，兩人輪流取石，每次每人至少取一個，最多取上次對方取走的石頭數的 5 倍。取走最後一個石頭的人贏得勝利。(第一次取石不可以取完全部石頭，請以文字及表格說明這個遊戲的必勝關鍵及取勝關鍵。)

解答：

這次的遊戲規則改為最多取上次對手取走的石頭數 5 倍，有了前兩題的經驗，這次更有經驗知道如何推導，可以獨自一個人思考出需要取石的數量組合。



在經過逐一整理表格後，展開以下取勝的過程：

剩石數量	先手取石數	後手取石數	勝者	補充說明	必敗數字編號
1	直接獲勝				
2	1	1	後		X1
3	1	2	後		X2
4	1	3	後		X3
5	1	4	後		X4
6	1	5	後		X5
7	1,6	1	先		
8	1	(7)	後	先手不可取2，取1則讓後手取得必勝組合7	X6
9	1	(8)	先	先手不可取2，取1則讓後手取得必敗組合8	
10	1	(9)	後	先手不可取2，取1則讓後手取得必勝組合9	X7
11	1	(10)	先	先手不可取2，取1則讓後手取得必敗組合10	
12	1	(11)	後	先手不可取2，取1則讓後手取得必勝組合11	X8
13	1	(12)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
14	2	(12)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
15	(3)	(12)	後	先手取石組合無法成功讓後手取得必敗組合	X9
16	1	(15)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
17	2	(15)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
18	1	(17)	後	先手不可取3，取1,2均讓後手取得必勝組合	X10
19	1	(18)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
20	2	(18)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
21	3	(18)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
22	(4)	(18)	後	先手不可取4，取1,2,3均讓後手取得必勝組合；亦可解讀為先手取石組合無法成功讓後手取得必敗組合	X11
23	1	(22)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
24	2	(22)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
25	3	(22)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
26	4	(22)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
27	(5)	(22)	後	先手不可取5，取1,2,3,4均讓後手取得必勝組合；亦可解讀為先手取石組合無法成功讓後手取得必敗組合	X12
28	1	(27)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
29	2	(27)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
30	3	(27)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
31	4	(27)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
32	5	(27)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
33	(6)	(27)	後	先手取石組合無法成功讓後手取得必敗組合	X13
34	1	(33)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
35	2	(33)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
36	3	(33)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
37	4	(33)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
38	5	(33)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
39	6	(33)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
40	(7)	(33)	先	先手以必勝組合，讓後手面臨必敗組合	
41	(8)	(33)	後	先手取石組合無法成功讓後手取得必敗組合	X14
42	1	(41)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
43	2	(41)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
44	3	(41)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
45	4	(41)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
46	5	(41)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
47	6	(41)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
48	7	(41)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
49	8	(41)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
50	(9)	(41)	先	先手以必勝組合，讓後手面臨必敗組合	
51	(10)	(41)	後	先手取石組合無法成功讓後手取得必敗組合	X15
52	1	(51)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
53	2	(51)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
54	3	(51)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
55	4	(51)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
56	5	(51)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
57	6	(51)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
58	7	(51)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
59	8	(51)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
60	9	(51)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
61	10	(51)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
62	(11)	(51)	先	先手以必勝組合，讓後手面臨必敗組合	
63	(12)	(63)	後	先手取石組合無法成功讓後手取得必敗組合	X16
64	1	(63)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
65	2	(63)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
66	3	(63)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
67	4	(63)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
68	5	(63)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
69	6	(63)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
70	7	(63)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
71	8	(63)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
72	9	(63)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
73	10	(63)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
74	11	(63)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
75	12	(63)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
76	(13)	(63)	先	先手以必勝組合，讓後手面臨必敗組合	
77	(14)	(63)	先	先手以必勝組合，讓後手面臨必敗組合	
78	(15)	(63)	後	先手取石組合無法成功讓後手取得必敗組合	X17
79	1	(78)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
80	2	(78)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
81	3	(78)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
82	4	(78)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
83	5	(78)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
84	6	(78)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
85	7	(78)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
86	8	(78)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
87	9	(78)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
88	10	(78)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
89	11	(78)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
90	12	(78)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
91	13	(78)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
92	14	(78)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
93	15	(78)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
94	(16)	(78)	先	先手以必勝組合，讓後手面臨必敗組合	
95	(17)	(78)	先	先手以必勝組合，讓後手面臨必敗組合	
96	(18)	(78)	後	先手取石組合無法成功讓後手取得必敗組合	X18
97	1	(96)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
98	2	(96)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
99	3	(96)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	
100	4	(96)	先	先手取石數字，讓後手面對必敗組合	

根據上面從 1~200 個的推倒，找到 5 倍的必敗數字、必敗編號以及這些數列之間的關係，

必敗編號	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
必敗數字	2	3	4	5	6	8	10	12
數列關係								
數列關係								
必敗編號	X9	X10	X11	X12	X13	X14	X15	X16
必敗數字	15	18	22	27	33	41	51	63
數列關係		15+3	18+4	22+5	27+6	33+8	41+10	51+12
數列關係		X9+X2	X10+X3	X11+X4	X12+X5	X13+X6	X14+X7	X15+X8
必敗編號	X17	X18	X19	X20	X21			
必敗數字	78	96	118	145	178			
數列關係	63+15	78+18	96+22	118+27	145+33			
數列關係	X16+X9	X17+X10	X18+X11	X19+X12	X20+X13			

因此發現 $X_n = X_{n-1} + X_{n-8}$ ，且 $n \geq 10$ 時公式才有效。

所以當最開始一堆石頭有 200 顆時，先手要直接取 22 顆，讓後手面對 178 這個必敗數字，這樣

先手只要記牢後面的每一個必敗數字，讓後手去面對，先手就可以確保自己取得勝利！

【問題四】 一堆石頭有 N 個，兩人輪流取石，每次每人至少取一個，最多取上次對方取走的石頭數的 M 倍。取走最後一個石頭的人贏得勝利。(第一次取石不可以取完全部石頭，請以文字及表格說明這個遊戲的必勝關鍵及取勝關鍵。)

解答：

依據前三題的經驗，每個題目都有一組必敗數字，必敗數字的數列在大於某個數字之後，就可以找出必敗數列的關係公式。如：

第一題(3 倍)： $X_n = X_{n-1} + X_{n-4}$ ，且 $n \geq 5$ 時公式才有效

第二題(4 倍)： $X_n = X_{n-1} + X_{n-6}$ ，且 $n \geq 8$ 時公式才有效

第三題(5 倍)： $X_n = X_{n-1} + X_{n-8}$ ，且 $n \geq 10$ 時公式才有效

發現在三個公式中的 4,6,8 的數字，其實跟題目中「最多取走對方取走的石頭數的(M)倍數」有個共同關係，4,6,8 分別是 2 倍的 M 再減 2。也就是說我們可以把三個公式變成一個公式就好：

$$X_n = X_{n-1} + X_{n-(2M-2)}$$

所以當面對 N 個石頭的時候，我們可以從這個公式逐步推導出必敗數字的數列，然後找到先手需要從 N 個開始取石時，他需要取的石頭數，來讓先手有優勢，持續讓後手面對必敗數字數列，這樣就回贏了！

【問題五】請自行設計一種有趣的取石遊戲，並以文字及表格說明這個遊戲的必勝關鍵即必勝過程。

解答：

我想要設計一個跟前面題目不同的取石遊戲，並且結合我喜歡的寶可夢人物為遊戲主題人物，這樣可能會吸引更多小朋友想要一起來玩這個遊戲，也把遊戲設計的更有趣味性！

遊戲名稱：最後精靈球的搶奪大戰！

玩家：第一個玩家(先手)是 小智隊

第二個玩家(後手)是 火箭隊

遊戲規則：

- 1.遊戲總共有五個關卡，每個關卡中有不同數量的精靈球，玩家輪流行動拿取精靈球，每個關卡只能從一排中拿走 1 到 3 顆的精靈球。
- 2.最後一個取走精靈球的玩家獲勝，獲勝者可以搶奪走所有的精靈球並得到裡面的寶可夢。
- 3.玩完五個關卡後，看誰得到的精靈球總數最多，就是最終的王者，可以獲得最強的「夢幻」。
- 4.各關卡精靈球數量分別為：

第一關	第二關	第三關	第四關	第五關
8	9	10	11	12

取勝過程：

也是依樣從數字小的開始反向推倒，找找有沒有必敗顆數。

小智隊是先手，假設精靈球數是 1,2,3 顆時，小智隊會必勝，因為直接全拿。

當精靈球數是 4 時，不論小智拿 1,2,3 顆，最後一顆一定是火箭隊拿的，所以火箭隊必勝！

當精靈球是 5 時，小智可以先拿 1 顆，讓火箭隊面對 4 顆的局面，變成最後一顆一定是小智拿到！

當精靈球是 6 或 7 顆時，先手的小智可以選擇 1 或 2 顆精靈球，這樣小智就一定會贏了。

但到了 8 顆石頭的時候，先手的小智就跟遇到 4 顆的時候一樣，只能讓火箭隊拿到最後一顆，舉例其中一種拿法：1,1,2,2,1,1。後手的火箭隊，只要一直跟小智前一手拿一樣的數字，火箭隊在第一關就贏定了！

以此繼續往下推，會逐步發現，當精靈球數是 4 的倍數的時候，小智都拿不到最後一顆，所以第一關(8 顆)跟第五關(12 顆)，獲勝者會是火箭隊，第二、三、四關獲勝者會是小智。最終小智會取得 30 顆精靈球，而火箭隊只會拿到 20 顆，所以最終的夢幻將會是小智隊贏得！

必勝關鍵：只要關卡內的精靈球數字非 4 的倍數，這樣獲勝的就一定是小智隊！



以上就是我設計以寶可夢做主題，以及改變前面幾題取石遊戲的變化版本，希望有一天會有真的這個遊戲，我一定可以透過必勝關鍵，最終贏得我最喜歡的夢幻！