頑石點頭

高愛迪斯 第 57 期【數學題目】

班級: 311

資優班座號: 3

姓名: 侯詔閎

開始第一題之前，我們先了解 2 倍的問題及取石數量吧！

定義 N=石頭數量 M=最多能在取幾倍

取石數需≦(N-已取走的石頭)/(M+1)

若無餘數需再減 1；否則下一次會被對手拿光。

<table>
<tr><td>初始數字</td><td>2 必輸</td><td>3 必輸</td><td colspan="2">4 必贏</td><td>5 必輸</td></tr>
<tr><td>甲</td><td>1</td><td>1</td><td colspan="2">1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>乙</td><td>1</td><td>2</td><td colspan="2" rowspan="2">剩 3</td><td>1</td></tr>
<tr><td>甲</td><td></td><td></td><td>剩 3</td></tr>
<tr><td>初始數字</td><td>6 必贏</td><td>7 必贏</td><td colspan="2">8 必輸</td><td>9 必贏</td></tr>
<tr><td>甲</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>乙</td><td rowspan="2">剩 5</td><td rowspan="2">剩 5</td><td>2</td><td>1</td><td rowspan="2">剩 8</td></tr>
<tr><td>甲</td><td colspan="2">剩 5</td></tr>
<tr><td>初始數字</td><td>10 必贏</td><td>11 必贏</td><td colspan="2">12 必贏</td><td>13 必輸</td></tr>
<tr><td>甲</td><td>2</td><td>3</td><td colspan="2">1</td><td>1~4</td></tr>
<tr><td>乙</td><td rowspan="2">剩 8</td><td rowspan="2">剩 8</td><td>2</td><td>1</td><td>4~1</td></tr>
<tr><td>甲</td><td>剩 9</td><td>10</td><td>剩 8</td></tr>
</table>

定義 F=二倍取石必輸數列

F_1=數列第一項 F_2=數列第二項……

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
2	3	5	8	13

以上可發現 $F_n=F_{n-2}+F_{n-1}$。

☆第一題：一堆石頭有 50 個，每人每次至少取一個，最多取走上次對方取走的 3 倍，取走最後一顆石頭的人勝利(第一次取石不可取全部石頭) 遊玩紀錄↓

初始數字	2 必輸	3 必輸	4 必輸	5 必贏
甲	1	1	1	1
乙	1	2	3	剩 4
初始數字	6 必輸	7 必贏	8 必輸	9 必贏
甲	1	1	1	1
乙	剩 5	剩 6	剩 7	剩 8
初始數字	10 必贏	11 必輸	12 必贏	13 必贏
甲	2	≦2	1	2
乙	剩 8	剩≧9	剩 11	剩 11
初始數字	14 必贏	15 必輸	16 必贏	17 必贏

甲	3	≦3	1	2
乙	剩 11	剩≧12	剩 15	剩 15
初始數字	18 必贏	19 必贏	20 必贏	21 必輸
甲	3	4	1	≦5
乙	剩 15	剩 15	≦3	剩≧16
甲			剩≧16	
初始數字	22 必贏	23 必贏	24 必贏	25 必贏
甲	1	2	3	4
乙	剩 21	剩 21	剩 21	剩 21
初始數字	26 必贏	27 必贏	28 必贏	29 必輸
甲	5	6	1	≦7
乙	剩 21	剩 21	≦3	剩≧22
甲			剩≧25	
初始數字	30 必贏	31 必贏	32 必贏	33 必贏
甲	1	2	3	4
乙	剩 29	剩 29	剩 29	剩 29
初始數字	34 必贏	35 必贏	36 必贏	37 必贏
甲	5	6	7	8

乙	剩 29	剩 29	剩 29	剩 29
初始數字	38 必贏	39 必贏	40 必輸	41 必贏
甲	9	2	≦9	1
乙	剩 29	1	剩≧39	剩 40
甲		1		
乙		1		
甲		1		
乙		剩 33		
初始數字	42 必贏	43 必贏	44 必贏	45 必贏
甲	2	3	4	5
乙	剩 40	剩 40	剩 40	剩 40
初始數字	46 必贏	47 必贏	48 必贏	49 必贏
甲	6	7	8	9
乙	剩 40	剩 40	剩 40	剩 40
初始數字	50 必贏			
甲	10			
乙	剩 40			

定義 G=3 倍取石必輸數列

G_1=數列第一項 G_2=數列第二項……

G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7
2	3	4	6	8	11	15
G_8	G_9	G_{10}	推 G_{11}	推 G_{12}	推 G_{13}	推 G_{14}
21	29	40	55	76	105	145

我們觀察後，發現它的規律為 $\boxed{G_n=G_{n-1}+G_{n-4}}$，

並且 n≧5；這個規律就會成立

例：

$G_5=G_4+G_1=8=6+2$

$G_6=G_5+G_2=11=8+3$

$G_7=G_6+G_3=15=11+4$

……

$G_{10}=G_9+G_6=40=29+11$

推 $G_{11}=G_{10}+G_7=40+15=55$

必勝方式：先攻取 10 顆石頭，剩下必輸數列(40 顆)，待對手取石—對手無法取到前一個必輸數列 29 顆：因為取石數

需≦(N-已取走的石頭)/(M+1)= 40/(3+1)=10，我們再讓石頭的數量為下一個必輸數列(29)。依此類推 21、15、11、8、6、4、3、2。過程中若可以全部取完就全部取完。

☆第二題：一堆石頭有 100 個，兩人輪流取石，每次每人至少取一個，最多取上 次對方取走的石頭數的 4 倍。取走最後一個石頭的人贏得勝利。(第一次取石不可以取完全部石頭)

遊玩紀錄↓

初始數字	2 必輸	3 必輸	4 必輸	5 必輸
甲	1	1	1	1
乙	1	2	3	4
初始數字	6 必贏	7 必輸	8 必贏	9 必輸
甲	1	1	1	1
乙	剩 5	剩 6	剩 7	剩 8
初始數字	10 必贏	11 必贏	12 必輸	13 必贏
甲	1	2	≦2	1
乙	剩 9	剩 9	剩≧10	剩 12

初始數字	14 必贏	15 必輸	16 必贏	17 必贏
甲	2	≦2	1	2
乙	剩 12	剩≧13	剩 15	剩 15

初始數字	18 必贏	19 必輸	20 必贏	21 必贏
甲	3	≦3	1	2
乙	剩 15	剩≧16	剩 19	剩 19

初始數字	22 必贏	23 必贏	24 必輸	25 必贏
甲	3	4	≦4	1
乙	剩 19	剩 19	剩≧20	剩 24

初始數字	26 必贏	27 必贏	28 必贏	29 必贏
甲	2	3	4	5
乙	剩 24	剩 24	剩 24	剩 24

初始數字	30 必贏	31 必輸	32 必贏	33 必贏
甲	1	≦6	1	2
乙	≦4	剩≧25	剩 31	剩 31
甲	≧1			
乙	剩 24			

初始數字	34 必贏	35 必贏	36 必贏	37 必贏

甲	3	4	5	6
乙	剩 31	剩 31	剩 31	剩 31
初始數字	38 必贏	39 必贏	40 必輸	41 必贏
甲	7	1	≦7	1
乙	剩 31	1	剩≧32	剩 40
甲		1		
乙		1		
甲		4		
乙		剩 31		
初始數字	42 必贏	43 必贏	44 必贏	45 必贏
甲	2	3	4	5
乙	剩 40	剩 40	剩 40	剩 40
初始數字	46 必贏	47 必贏	48 必贏	49 必贏
甲	6	7	8	9
乙	剩 40	剩 40	剩 40	剩 40
初始數字	50 必贏	51 必贏	52 必輸	53 必贏
甲	1	2	≦10	1
乙	1	1	剩≧42	剩 52

甲	1	1		
乙	1	1		
甲	1	1		
乙	1	1		
甲	4	4		
乙	剩 40	剩 40		

定義 H=4 倍取石必輸數列

H_1=數列第一項 H_2=數列第二項……

H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	H_7
2	3	4	5	7	9	12
H_8	H_9	H_{10}	H_{11}	H_{12}	H_{13}	推 H_{14}
15	19	24	31	40	52	67

我們觀察後，發現它的規律為 $\boxed{H_n=H_{n-1}+H_{n-6}}$，

並且 n≧8；這個規律就會成立。

例：

$H_8=H_7+H_2=15=12+3$

$H_9=H_8+H_3=19=15+4$

$H_{10}=H_{11}+H_{12}=24=19+5$

……

$H_{13}=H_{12}+H_{7}=52=40+12$

推

$H_{14}=H_{13}+H_{8}=52+15=67$

$H_{15}=H_{14}+H_{9}=67+19=86$

$H_{16}=H_{15}+H_{10}=86+24=110$

必勝方式：先攻取 14 顆石頭，剩下必輸數列(86 顆)，待對手取石—對手無法取到前一個必輸數列 67 顆：因為取石數需≦(N-已取走的石頭)/(M+1)= 86/(4+1)=17…1，我們再讓石頭的數量為下一個必輸數列(67)。依此類推 52、40、31、24、19、15、12、9、7、5、4、3、2。過程中若可以全部取完就全部取完。

☆第三題：一堆石頭有 200 個，兩人輪流取石，每次每人至少取一個，最多取上 次對方取走的石頭數的 5 倍。取走最後一個石頭的人贏得勝利。(第一次取石不可取完全部石

頭）

初始數字	2 必輸	3 必輸	4 必輸	5 必輸
必	1	1	1	1
乙	1	2	3	4
初始數字	6 必輸	7 必贏	8 必輸	9 必贏
甲	1	1	1	1
乙	5	剩 6	剩 7	剩 8
初始數字	10 必輸	11 必贏	12 必輸	13 必贏
甲	1	1	1	1
乙	剩 9	剩 10	剩 11	剩 12
初始數字	14 必贏	15 必輸	16 必贏	17 必贏
甲	2	≦2	1	2
乙	剩 12	剩≧13	剩 15	剩 15
初始數字	18 必輸	19 必贏	20 必贏	21 必贏
甲	≦2	1	2	3
乙	剩≧15	剩 18	剩 18	剩 18
初始數字	22 必輸	23 必贏	24 必贏	25 必贏
甲	≦3	1	2	3

乙	剩≧19	剩 22	剩 22	剩 22
初始數字	26 必贏	27 必輸	28 必贏	29 必贏
甲	4	≦4	1	2
乙	剩 22	剩≧23	剩 27	剩 27
初始數字	30 必贏	31 必贏	32 必贏	33 必輸
甲	3	4	5	≦5
乙	剩 27	剩 27	剩 27	剩≧28
初始數字	34 必贏	35 必贏	36 必贏	37 必贏
甲	1	2	3	4
乙	剩 33	剩 33	剩 33	剩 33
初始數字	38 必贏	39 必贏	40 必贏	41 必輸
甲	5	6	1	≦6
乙	剩 33	剩 33	1	剩≧34
甲			5	
乙			剩 33	
初始數字	42 必贏	43 必贏	44 必贏	45 必贏
甲	1	2	3	4
乙	剩 41	剩 41	剩 41	剩 41

初始數字	46 必贏	47 必贏	48 必贏	49 必贏
甲	5	6	7	8
乙	剩 41	剩 41	剩 41	剩 41
初始數字	50 必贏	51 必輸	52 必贏	53 必贏
甲	1	≦8	1	2
乙	1	剩≧43	剩 51	剩 51
甲	1			
乙	1			
甲	5			
乙	剩 41			

定義 I=5 倍取石必輸數列

I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7
2	3	4	5	6	8	10
I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}
12	15	18	22	27	33	41
I_{15}	推 I_{16}	推 I_{17}	推 I_{18}	推 I_{19}	推 I_{20}	推 I_{21}
51	63	78	96	118	145	178

我們觀察後，發現它的規律為 $\boxed{I_n=I_{n-1}+I_{n-8}}$，

並且 n≧9；這個規律就會成立。

例：

$I_{10}=I_9+I_2=18=15+3$

$I_{11}=I_{10}+I_3=22=18+4$

$I_{12}=I_{11}+I_4=27=22+5$

……

$I_{15}=I_{14}+I_7=51=41+10$

推

$I_{16}=I_{15}+I_8=51+12=63$

$I_{17}=I_{16}+I_9=63+15=78$

$I_{18}=I_{17}+I_{10}=78+18=96$

$I_{19}=I_{18}+I_{11}=96+22=118$

$I_{20}=I_{19}+I_{12}=118+27=145$

$I_{21}=I_{20}+I_{13}=145+33=178$

$I_{22}=I_{21}+I_{14}=178+41=219$

必勝方式：先攻取 22 顆石頭，剩下必輸數列(178 顆)，待

對手取石—對手無法取到前一個必輸數列 145 顆：因為取石數需≦(N-已取走的石頭)/(M+1)= 178/(5+1)=29…4，我們再讓石頭的數量為下一個必輸數列(145)。依此類推 118、96、78、63、51、41、33、27、22、18、15、12、10、8、6、5、4、3、2。過程中若可以全部取完就全部取完。

☆第四題：一堆石頭有 N 個，兩人輪流取石，每次每人至少取一個，最多取上次對方取走的石頭數的 M 倍。取走最後一個石頭的人贏得勝利。(第一次取石不可取完全部石頭)請找出這個遊戲的必勝關鍵及公式

↓倍數之公式↓

倍數(M)	公式	定義所有數列為 A_n $A_n=A_{n-1}+A_{n-2(M-1)}$
2	$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$	M=2 $A_n=A_{n-1}+A_{n-2(2-1)}$ $A_n=A_{n-1}+A_{n-2}$
3	$G_n=G_{n-1}+G_{n-4}$	M=3 $A_n=A_{n-1}+A_{n-2(3-1)}$ $A_n=A_{n-1}+A_{n-4}$

4	$H_n=H_{n-1}+H_{n-6}$	M=4 $A_n=A_{n-1}+A_{n-2(4-1)}$ $A_n=A_{n-1}+A_{n-6}$
5	$I_n=I_{n-1}+I_{n-8}$	M=5 $A_n=A_{n-1}+A_{n-2(5-1)}$ $A_n=A_{n-1}+A_{n-8}$

定義 A=M 倍取石必輸數列

A_1=數列第一項 A_2=數列第二項……

$A_n=A_{n-1}+A_{n-2(M-1)}$

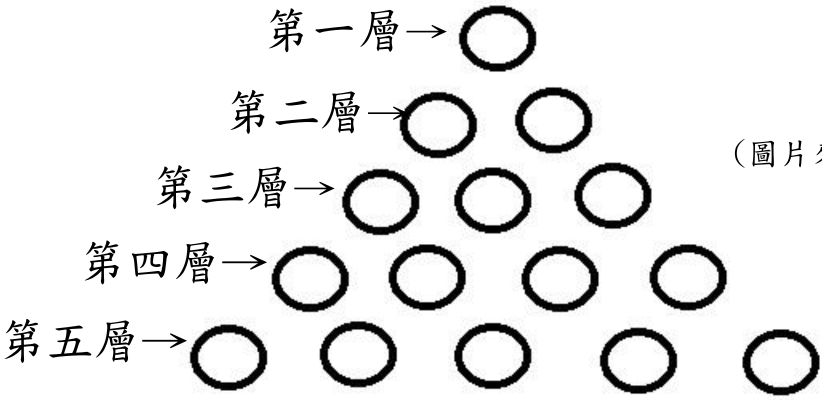
假設 $A_n<N<A_{n+1}$

必勝方式：先攻取 N−A_n顆石頭，剩下必輸數列(A_n顆)，待對手取石—對手無法取到前一個必輸數列 A_{n-1}顆：因為取石數需≦(N-已取走的石頭)/(M+1)= A_n/(M+1)，我們再讓石頭的數量為下一個必輸數列(A_{n-1})。依此類推 A_{n-2}、A_{n-3}、A_{n-4}……A_1。過程中若可以全部取完就全部取完。

☆第五題：請自行設計一種有趣的取石遊戲，並以文字及表格說明這個遊戲的必勝關鍵及取勝過程

我設計了一個遊戲，規則為：先將石頭排成下圖，一次只

能取一層中的任何石頭，取最後最後一顆石頭的人就輸了



（圖片來源：作者自行繪製）

先攻必勝，第一次要取第一層，接著讓每層各剩一顆，且數量為奇數就贏了

參考資料：

1. 「費齊取石-探討齊肯多夫定理在取石對弈遊戲中的延伸」，屏東縣第 61 屆中小學科學展覽作品說明書。

2. 游森棚「必勝撿石頭」，科學月刊 2015 第 542 期。

3. 「撿石頭」，中華民國第四十七屆中小學科學展覽會作品說明書。