頑石點頭

製作者：黃容欣

一、 一堆石頭有 50 個，兩人輪流取石，每次每人至少取一個，最多取上次對方取走的石頭數的 3 倍。取走最後一個石頭的人贏得勝利。(第一次取石不可以取完全部石頭)請以文字及表格說明這個遊戲的必勝關鍵及取勝過程。

1. 推論過程（後手必勝石頭數以黃底標記）

N	推論過程
2	1+1，後手必勝
3	1+2 或 2+1，後手必勝
4	1+3 或 2+2 或 3+1，後手必勝
5	1+4，先手取 1，因為後手無法直接取完 4，所以先手會在 4 這堆變成後手必勝
6	2+4，先手取 2，後手直接取 4 1+1+4，先手取 1，則後手取 1，因為先手無法直接取完 4，所以後手會在 4 這堆變成後手必勝
7	1+6，先手取 1，因為後手無法直接取完 6，所以先手會在 6 這堆變成後手必勝
8	2+6，先手取 2，後手直接取 6 1+1+6，先手取 1，則後手取 1，因為先手無法直接取完 6，所以後手會在 6 這堆變成後手必勝
9	1+8，先手取 1，因為後手無法直接取完 8，所以先手會在 8 這堆變成後手必勝
10	2+8，先手取 2，因為後手無法直接取完 8，所以先手會在 8 這堆變成後手必勝
11	3+8，先手取 3，後手直接取 8 1+2+8，先手取 1，則後手取 2，因為先手無法直接取完 8，所以後手會在 8 這堆變成後手必勝 2+1+8，先手取 1，則後手取 2，因為先手無法直接取完 8，所以後手會在 8 這堆變成後手必勝
12	1+11，先手取 1，因為後手無法直接取完 11，所以先手會在 11 這堆變成後手必勝
13	2+11，先手取 2，因為後手無法直接取完 11，所以先手會在 11 這堆變成後手必勝
14	3+11，先手取 3，因為後手無法直接取完 11，所以先手會在 11 這堆變成後手必勝
15	4+11，先手取 4，後手直接取 11 1+3+11，先手取 1，則後手取 3，因為先手無法直接取完 11，所以後手會在 11 這堆變成後手必勝 2+2+11，先手取 2，則後手取 2，因為先手無法直接取完 11，所以後手會在 11 這堆變成後手必勝 3+1+11，先手取 3，則後手取 1，因為先手無法直接取完 11，所以後手會在 11 這堆變成後手必勝
16	1+15，先手取 1，因為後手無法直接取完 15，所以先手會在 15 這堆變成後手必勝
17	2+15，先手取 2，因為後手無法直接取完 15，所以先手會在 15 這堆變成後手必勝
18	3+15，先手取 3，因為後手無法直接取完 15，所以先手會在 15 這堆變成後手必勝
19	4+15，先手取 4，因為後手無法直接取完 15，所以先手會在 15 這堆變成後手必勝
20	1+4+15，先手取 1，因為後手無法直接取完 4，所以在 4 這堆的目標轉為讓先手取到最後一顆的數目最大，所以後手取 1、先手取 3，因為後手無法直接取完 15，所以先手會在 15 這堆變成後手必勝
21	6+15，先手取 6，後手直接取 15 1+1+4+15，先手取 1，接下來同 N=20 的推論，所以後手必勝 2+4+15，先手取 2，則後手取 4，因為先手無法直接取完 15，所以後手會在 15 這堆變成後手必勝 3+3+11，先手取 3，則後手取 3，因為先手無法直接取完 15，所以後手會在 15 這堆變成後手必勝 4+2+15，先手取 4，則後手取 2，因為先手無法直接取完 15，所以後手會在 15 這堆變成後手必勝 5+1+11，先手取 5，則後手取 1，因為先手無法直接取完 15，所以後手會在 15 這堆變成後手必勝
...	...

2. 後手必勝石頭數（以下簡稱為 W_n）

項數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
後手必勝石頭數	2	3	4	6	8	11	15	21	29	40

(1) 由上表可觀察出：$W_5=8=6+2=W_4+W_1$、$W_6=11=8+3=W_5+W_2$、$W_7=15=11+4=W_6+W_3$、$W_8=21=15+6=W_7+W_4$、...。

(2) 所以可以歸納出下列遞迴式：**當 n>=5 時，$W_n=W_{n-1}+W_{n-4}$**。

3. 由 1 的推論過程中可以觀察到：任何石頭數都可依序取出最大且不超過剩餘石頭數的後手必勝石頭數，並將該石頭數表達成這些取出來的數字和。

(1) 若石頭數 N 屬於 W_n，則 $N=W_n=W_{n-1}+W_{n-4}$，其中 $W_{n-1}>W_{n-4}$ 且 **(n-1)-(n-4)=3**，即相鄰兩個數字的項數間距會**等於**遞迴式的項數間距。

I. 如果我們可以**證明 $3*W_{n-4}>=W_{n-1}$**

代表先手雖然想一次取走 W_{n-4}，讓自己在取 W_{n-1} 的時候變成後手必勝，但因為 $3*W_{n-4}>=W_{n-1}$，所以代表輪到後手時可以一次就取完 W_{n-1}，因此先手不會想一次取走 W_{n-4}。

II. 如果我們可以**證明 $3*(3/4*W_{n-4})<W_{n-1}$**

假設 I 成立，代表先手不會想一次取走 W_{n-4}，此時因為 W_{n-4} 為後手必勝石頭數，所以先手的目標會轉為讓後手在取完 W_{n-4} 的數字極大，也就是先手取 $1/4*W_{n-4}$，後手取 $3/4*W_{n-4}$，並希望自己接下來可以一次取完 W_{n-1}，但因為 $3*(3/4*W_{n-4})<W_{n-1}$，所以先手無法一次取完 W_{n-1}，於是 W_{n-1} 又是先手無法一次取完的後手必勝石頭數。

III. **若石頭數屬於 W_n 且 I、II 成立，則代表後手必勝**。

(2) 若石頭數 N 不屬於 W_n，則 $N=W_{m1}+W_{m2}+W_{m3}+W_{m4}+...$，其中 $W_{m1}<W_{m2}<W_{m3}<W_{m4}<...$且 **$m_{i+1}-m_i>3$**，即相鄰兩個數字的項數間距會**大於**遞迴式的項數間距。。

IV. 如果我們可以**證明 $3*W_{n-4}<W_n$**

- 先手會一次取走 W_{m1}，因為 $m_2-m_1>3$ 且 $3*W_{n-4}<W_n$，所以 $3*W_{m1}<W_{m2}$，代表後手無法一次取完 W_{m2}，因此先手取完 W_{m1} 後，會讓自己在 W_{m2} 變成後手必勝。
- 因為後手無法一次取完 W_{m2}，所以後手的目標會轉為讓先手在取完 W_{m2} 的數字極大（假設為 X），並希望自己接下來可以一次取完 W_{m3}，但因為 $m_3-m_2>3$ 且 $3*W_{n-4}<W_n$，所以 $3*X<3*W_{m2}<W_{m3}$，因此後手仍然無法一次取完 W_{m3}，故先手在 W_{m3} 依然是後手必勝。
- 依此類推，先手會讓自己在 W_{m4}、...都是後手必勝。

V. **若石頭數不屬於 W_n 且 IV 成立，則代表先手必勝**。

4. 回到問題本身，根據 2 跟 3 的觀察，我們可以知道 50 不屬於 W_n，並可拆解 $50=40+8+2=W_{10}+W_5+W_1$。

石頭總數		50		我 V.S. 爸爸				勝負
我				爸爸				
取	2	剩下	48	取	2	剩下	46	
取	6	剩下	40	取	11	剩下	29	
取	29	剩下	0					我勝

(1) 先手會一次取走 2。

(2) 因為 $3*W_1=6<8=W_5$，所以後手無法一次取走 8，但因為 8 是後手必勝石頭數，所以後手的目標轉為讓先手取到最後一顆的數字極大，所以後手取 2、先手取 6，並希望自己接下來可以一次取完 40，但因為 3*6<40，所以後手無法一次取走 40，所以先手會在 40 這堆仍然是後手必勝。

二、 一堆石頭有 100 個，兩人輪流取石，每次每人至少取一個，最多取上次對方取走的石頭數的 4 倍。取走最後一個石頭的人贏得勝利。(第一次取石不可以取完全部石頭),請以文字及表格說明這個遊戲的必勝關鍵及取勝過程。

1. 推論過程（後手必勝石頭數以黃底標記）

N	推論過程
2	1+1，後手必勝
3	1+2 或 2+1，後手必勝
4	1+3 或 2+2 或 3+1，後手必勝
5	1+4 或 2+3 或 3+2 或 4+1，後手必勝
6	1+5，先手取 1，因為後手無法直接取完 5，所以先手會在 5 這堆變成後手必勝
7	2+5，先手取 2，後手直接取 5 1+1+5，先手取 1，則後手取 1，因為先手無法直接取完 5，所以後手會在 5 這堆變成後手必勝
8	1+7，先手取 1，因為後手無法直接取完 7，所以先手會在 7 這堆變成後手必勝
9	2+7，先手取 2，後手直接取 7 1+1+7，先手取 1，則後手取 1，因為先手無法直接取完 7，所以後手會在 7 這堆變成後手必勝
10	1+9，先手取 1，因為後手無法直接取完 9，所以先手會在 9 這堆變成後手必勝
11	2+9，先手取 2，因為後手無法直接取完 9，所以先手會在 9 這堆變成後手必勝
12	3+9，先手取 3，後手直接取 9 1+2+9，先手取 1，則後手取 2，因為先手無法直接取完 9，所以後手會在 9 這堆變成後手必勝 2+1+11，先手取 2，則後手取 1，因為先手無法直接取完 9，所以後手會在 9 這堆變成後手必勝
13	1+12，先手取 1，因為後手無法直接取完 12，所以先手會在 12 這堆變成後手必勝
14	2+12，先手取 2，因為後手無法直接取完 12，所以先手會在 12 這堆變成後手必勝
15	3+12，先手取 3，後手直接取 12 1+2+12，先手取 1，則後手取 2，因為先手無法直接取完 12，所以後手會在 12 這堆變成後手必勝 2+1+12，先手取 2，則後手取 1，因為先手無法直接取完 12，所以後手會在 12 這堆變成後手必勝
16	1+15，先手取 1，因為後手無法直接取完 15，所以先手會在 15 這堆變成後手必勝
17	2+15，先手取 2，因為後手無法直接取完 15，所以先手會在 15 這堆變成後手必勝
18	3+15，先手取 3，因為後手無法直接取完 15，所以先手會在 15 這堆變成後手必勝
19	4+15，先手取 3，後手直接取 15 1+3+15，先手取 1，則後手取 3，因為先手無法直接取完 15，所以後手會在 15 這堆變成後手必勝 2+2+15，先手取 2，則後手取 2，因為先手無法直接取完 15，所以後手會在 15 這堆變成後手必勝 3+1+15，先手取 3，則後手取 1，因為先手無法直接取完 15，所以後手會在 15 這堆變成後手必勝
20	1+19，先手取 1，因為後手無法直接取完 19，所以先手會在 19 這堆變成後手必勝
21	2+19，先手取 2，因為後手無法直接取完 19，所以先手會在 19 這堆變成後手必勝
22	3+19，先手取 3，因為後手無法直接取完 19，所以先手會在 19 這堆變成後手必勝
23	4+19，先手取 4，因為後手無法直接取完 19，所以先手會在 19 這堆變成後手必勝
24	5+19，先手取 5，後手直接取 19 1+4+15，先手取 1，則後手取 4，因為先手無法直接取完 19，所以後手會在 19 這堆變成後手必勝 2+3+15，先手取 2，則後手取 3，因為先手無法直接取完 19，所以後手會在 19 這堆變成後手必勝 3+2+15，先手取 3，則後手取 2，因為先手無法直接取完 19，所以後手會在 19 這堆變成後手必勝 4+1+15，先手取 4，則後手取 1，因為先手無法直接取完 19，所以後手會在 19 這堆變成後手必勝
…	…

2. 後手必勝石頭數（以下簡稱為 W_n）

項數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
後手必勝石頭數	2	3	4	5	7	9	12	15	19	24
項數	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
後手必勝石頭數	31	40	52	67	86	110	141	181	233	300

(1) 由上表可觀察出：$W_8=15=12+3=W_7+W_2$、$W_9=19=15+4=W_8+W_3$、$W_{10}=24=19+5=W_9+W_4$、...。

(2) 所以可以歸納出下列遞迴式：**當 $n>=8$ 時，$W_n=W_{n-1}+W_{n-6}$**。

3. 由 1 的推論過程中可以觀察到：任何石頭數都可依序取出最大且不超過剩餘石頭數的後手必勝石頭數，並將該石頭數表達成這些取出來的數字和。

(1) 若石頭數 N 屬於 W_n，則 $N=W_n=W_{n-1}+W_{n-6}$，其中 $W_{n-1}>W_{n-6}$ 且 **$(n-1)-(n-6)=5$**，即相鄰兩個數字的項數間距會**等於**遞迴式的項數間距。

I. 如果我們可以**證明 $4*W_{n-6}>=W_{n-1}$**

代表先手雖然想一次取走 W_{n-6}，讓自己在取 W_{n-1} 的時候變成後手必勝，但因為 $4*W_{n-6}>=W_{n-1}$，所以代表輪到後手時可以一次就取完 W_{n-1}，因此先手不會想一次取走 W_{n-6}。

II. 如果我們可以**證明 $4*(4/5*W_{n-6})<W_{n-1}$**

假設 I 成立，代表先手不會想一次取走 W_{n-6}，此時因為 W_{n-6} 為後手必勝石頭數，所以先手的目標會轉為讓後手在取完 W_{n-6} 的數字極大，也就是先手取 $1/5*W_{n-6}$，後手取 $4/5*W_{n-6}$，並希望自己接下來可以一次取完 W_{n-1}，但因為 $4*(4/5*W_{n-6})<W_{n-1}$，所以先手無法一次取完 W_{n-1}，於是 W_{n-1} 又是先手無法一次取完的後手必勝石頭數。

III. **若石頭數屬於 W_n 且 I、II 成立，則代表後手必勝**。

(2) 若石頭數 N 不屬於 W_n，則 $N=W_{m1}+W_{m2}+W_{m3}+W_{m4}+...$，其中 $W_{m1}<W_{m2}<W_{m3}<W_{m4}<...$ 且 **$m_{i+1}-m_i>5$**，即相鄰兩個數字的項數間距會**大於**遞迴式的項數間距。。

IV. 如果我們可以**證明 $4*W_{n-6}<W_n$**

- 先手會一次取走 W_{m1}，因為 $m_2-m_1>5$ 且 $4*W_{n-6}<W_n$，所以 $4*W_{m1}<W_{m2}$，代表後手無法一次取完 W_{m2}，因此先手取完 W_{m1} 後，會讓自己在 W_{m2} 變成後手必勝。
- 因為後手無法一次取完 W_{m2}，所以後手的目標會轉為讓先手在取完 W_{m2} 的數字極大（假設為 X），並希望自己接下來可以一次取完 W_{m3}，但因為 $m_3-m_2>5$ 且 $4*W_{n-6}<W_n$，所以 $4*X<4*W_{m2}<W_{m3}$，因此後手仍然無法一次取完 W_{m3}，故先手在 W_{m3} 依然是後手必勝。
- 依此類推，先手會讓自己在 W_{m4}、...都是後手必勝。

V. **若石頭數不屬於 W_n 且 IV 成立，則代表先手必勝**。

4. 回到問題本身，根據 2 跟 3 的觀察，我們可以知道 100 不屬於 W_n，並可拆解 $100=86+12+2=W_{15}+W_7+W_1$。

石頭總數		100		我 V.S. 爸爸				勝負
我				爸爸				
取	2	剩下	98	取	3	剩下	95	
取	9	剩下	86	取	18	剩下	68	
取	68	剩下	0					我勝

(1) 先手會一次取走 2。

(2) 因為 $4*W_1=8<12=W_7$，所以後手無法一次取走 12，但因為 12 是後手必勝石頭數，所以後手的目標轉為讓先手取到最後一顆的數字極大，所以後手取 3、先手取 9，並希望自己接下來可以一次取完 86，但因為 $4*9<36$，所以後手無法一次取走 86，所以先手會在 86 這堆仍然是後手必勝。

三、 一堆石頭有 200 個，兩人輪流取石，每次每人至少取一個，最多取上次對方取走的石頭數的 5 倍。取走最後一個石頭的人贏得勝利。(第一次取石不可以取完全部石頭),請以文字及表格說明這個遊戲的必勝關鍵及取勝過程。

1. 推論過程（後手必勝石頭數以黃底標記）

N	推論過程
2	1+1，後手必勝
3	1+2 或 2+1，後手必勝
4	1+3 或 2+2 或 3+1，後手必勝
5	1+4 或 2+3 或 3+2 或 4+1，後手必勝
6	1+5 或 2+4 或 3+3 或 4+2 或 5+1，後手必勝
7	1+6，先手取 1，因為後手無法直接取完 6，所以先手會在 6 這堆變成後手必勝
8	2+6，先手取 2，後手直接取 6 1+1+6，先手取 1，則後手取 1，因為先手無法直接取完 6，所以後手會在 6 這堆變成後手必勝
9	1+8，先手取 1，因為後手無法直接取完 8，所以先手會在 8 這堆變成後手必勝
10	2+8，先手取 2，後手直接取 8 1+1+8，先手取 1，則後手取 1，因為先手無法直接取完 8，所以後手會在 8 這堆變成後手必勝
11	1+10，先手取 1，因為後手無法直接取完 10，所以先手會在 10 這堆變成後手必勝
12	2+10，先手取 2，後手直接取 10 1+1+10，先手取 1，則後手取 1，因為先手無法直接取完 10，所以後手會在 10 這堆變成後手必勝
13	1+12，先手取 1，因為後手無法直接取完 12，所以先手會在 12 這堆變成後手必勝
14	2+12，先手取 2，因為後手無法直接取完 12，所以先手會在 12 這堆變成後手必勝
15	3+12，先手取 3，後手直接取 12 1+2+12，先手取 1，則後手取 2，因為先手無法直接取完 12，所以後手會在 12 這堆變成後手必勝 2+1+12，先手取 2，則後手取 1，因為先手無法直接取完 12，所以後手會在 12 這堆變成後手必勝
16	1+15，先手取 1，因為後手無法直接取完 15，所以先手會在 15 這堆變成後手必勝
17	2+15，先手取 2，因為後手無法直接取完 15，所以先手會在 15 這堆變成後手必勝
18	3+15，先手取 3，後手直接取 15 1+2+15，先手取 1，則後手取 3，因為先手無法直接取完 15，所以後手會在 15 這堆變成後手必勝 2+1+15，先手取 2，則後手取 2，因為先手無法直接取完 15，所以後手會在 15 這堆變成後手必勝
19	1+18，先手取 1，因為後手無法直接取完 18，所以先手會在 18 這堆變成後手必勝
20	2+18，先手取 2，因為後手無法直接取完 18，所以先手會在 18 這堆變成後手必勝
21	3+18，先手取 3，因為後手無法直接取完 18，所以先手會在 18 這堆變成後手必勝
22	4+18，先手取 4，後手直接取 18 1+3+15，先手取 1，則後手取 3，因為先手無法直接取完 15，所以後手會在 15 這堆變成後手必勝 2+2+15，先手取 2，則後手取 2，因為先手無法直接取完 15，所以後手會在 15 這堆變成後手必勝 3+1+15，先手取 4，則後手取 1，因為先手無法直接取完 15，所以後手會在 15 這堆變成後手必勝
23	1+22，先手取 1，因為後手無法直接取完 22，所以先手會在 22 這堆變成後手必勝
24	2+22，先手取 2，因為後手無法直接取完 22，所以先手會在 22 這堆變成後手必勝
25	3+22，先手取 3，因為後手無法直接取完 22，所以先手會在 22 這堆變成後手必勝
26	4+22，先手取 4，因為後手無法直接取完 22，所以先手會在 22 這堆變成後手必勝
27	5+22，先手取 5，後手直接取 22 1+4+22，先手取 1，則後手取 4，因為先手無法直接取完 22，所以後手會在 22 這堆變成後手必勝

	2+3+22，先手取 2，則後手取 3，因為先手無法直接取完 22，所以後手會在 22 這堆變成後手必勝 3+2+22，先手取 3，則後手取 2，因為先手無法直接取完 22，所以後手會在 22 這堆變成後手必勝 4+1+22，先手取 4，則後手取 1，因為先手無法直接取完 22，所以後手會在 22 這堆變成後手必勝
28	1+27，先手取 1，因為後手無法直接取完 27，所以先手會在 27 這堆變成後手必勝
29	2+27，先手取 2，因為後手無法直接取完 27，所以先手會在 27 這堆變成後手必勝
30	3+27，先手取 3，因為後手無法直接取完 27，所以先手會在 27 這堆變成後手必勝
31	4+27，先手取 4，因為後手無法直接取完 27，所以先手會在 27 這堆變成後手必勝
32	5+27，先手取 5，因為後手無法直接取完 27，所以先手會在 27 這堆變成後手必勝
33	6+27，先手取 6，後手直接取 27 1+5+27，先手取 1，則後手取 5，因為先手無法直接取完 27，所以後手會在 27 這堆變成後手必勝 2+4+27，先手取 2，則後手取 4，因為先手無法直接取完 27，所以後手會在 27 這堆變成後手必勝 3+3+27，先手取 3，則後手取 3，因為先手無法直接取完 27，所以後手會在 27 這堆變成後手必勝 4+2+27，先手取 4，則後手取 2，因為先手無法直接取完 27，所以後手會在 27 這堆變成後手必勝 5+1+27，先手取 5，則後手取 1，因為先手無法直接取完 27，所以後手會在 27 這堆變成後手必勝
…	…

2. 後手必勝石頭數（以下簡稱為 W_n）

項數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
後手必勝石頭數	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18
項數	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
後手必勝石頭數	22	27	33	41	51	63	78	96	118	145
項數	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
後手必勝石頭數	178	219	270	333	411	507	625	770	948	1167

(1) 由上表可觀察出：$W_{10}=18=15+3=W_9+W_2$、$W_{11}=22=18+4=W_{10}+W_3$、$W_{12}=27=22+5=W_{11}+W_4$、$W_{13}=33=27+6=W_{12}+W_5$、...。

(2) 所以可以歸納出下列遞迴式：**當 $n>=10$ 時，$W_n=W_{n-1}+W_{n-8}$**。

3. 由 1 的推論過程中可以觀察到：任何石頭數都可依序取出最大且不超過剩餘石頭數的後手必勝石頭數，並將該石頭數表達成這些取出來的數字和。

(1) 若石頭數 N 屬於 W_n，則 $N=W_n=W_{n-1}+W_{n-8}$，其中 $W_{n-1}>W_{n-8}$ 且 **$(n-1)-(n-8)=7$**，即相鄰兩個數字的項數間距會**等於**遞迴式的項數間距。

I. 如果我們可以**證明 $5*W_{n-8}>=W_{n-1}$**

代表先手雖然想一次取走 W_{n-8}，讓自己在取 W_{n-1} 的時候變成後手必勝，但因為 $5*W_{n-8}>=W_{n-1}$，所以代表輪到後手時可以一次就取完 W_{n-1}，因此先手不會想一次取走 W_{n-8}。

II. 如果我們可以**證明 $5*(5/6*W_{n-8})<W_{n-1}$**

假設 I 成立，代表先手不會想一次取走 W_{n-8}，此時因為 W_{n-8} 為後手必勝石頭數，所以先手的目標會轉為讓後手在取完 W_{n-8} 的數字極大，也就是先手取 $1/6*W_{n-8}$，後手取 $5/6*W_{n-8}$，並希望自己接下來可以一次取完 W_{n-1}，但因為 $5*(5/6*W_{n-8})<W_{n-1}$，所以先手無法一次取完 W_{n-1}，於是 W_{n-1} 又是先手無法一次取完的後手必勝石頭數。

III. ***若石頭數屬於 W_n 且 I、II 成立，則代表後手必勝***。

(2) 若石頭數 N 不屬於 W_n，則 $N=W_{m1}+W_{m2}+W_{m3}+W_{m4}+...$，其中 $W_{m1}<W_{m2}<W_{m3}<W_{m4}<...$ 且 **$m_{i+1}-m_i>7$**，即相鄰兩個數字的項數間距會**大於**遞迴式的項數間距。。

VI. 如果我們可以**證明 $5*W_{n-8}<W_n$**

- 先手會一次取走 W_{m1}，因為 $m_2-m_1>7$ 且 $5*W_{n-8}<W_n$，所以 $5*W_{m1}<W_{m2}$，代表後手無法一次取完 W_{m2}，因此先手取完 W_{m1} 後，會讓自己在 W_{m2} 變成後手必勝。
- 因為後手無法一次取完 W_{m2}，所以後手的目標會轉為讓先手在取完 W_{m2} 的數字極大（假設為 X），並希望自己接下來可以一次取完 W_{m3}，但因為 $m_3-m_2>7$ 且 $5*W_{n-8}<W_n$，所以 $5*X<5*W_{m2}<W_{m3}$，因此後手仍然無法一次取完 W_{m3}，故先手在 W_{m3} 依然是後手必勝。
- 依此類推，先手會讓自己在 W_{m4}、...都是後手必勝。

VII. ***若石頭數不屬於 W_n 且 IV 成立，則代表先手必勝***。

4. 回到問題本身，根據 2 跟 3 的觀察，我們可以知道 200 不屬於 W_n，並可拆解 $200=178+22=W_{31}+W_{11}$。

石頭總數		200		我 V.S. 爸爸				勝負
我				爸爸				
取	22	剩下	178	取	30	剩下	148	
取	148	剩下	0					我勝

(1) 先手會一次取走 22。

(2) 因為 $5*W_1=110<178=W_7$，所以後手無法一次取走 178，所以先手會在 178 這堆仍然是後手必勝。

四、 一堆石頭有 N 個，兩人輪流取石，每次每人至少取一個，最多取上次對方取走的石頭數的 M 倍。取走最後一個石頭的人贏得勝利。(第一次取石不可取完全部石頭),請找出這個遊戲的必勝關鍵及取勝的一般化公式。

1. 後手必勝石頭數（以下簡稱為 W_n）

倍數	遞迴式
3	當 $n>=5$ 時，$W_n=W_{n-1}+W_{n-4}$
4	當 $n>=8$ 時，$W_n=W_{n-1}+W_{n-6}$
5	當 $n>=10$ 時，$W_n=W_{n-1}+W_{n-8}$
M	猜測：當 $n>=n'$時，假設 $D=2*(M-1)$，$W_n=W_{n-1}+W_{n-D}$

2. 以下 W_n 指的都是 M 倍後手必勝石頭數的數列：

(1) 任何石頭數都可依序取出最大且不超過剩餘石頭數的後手必勝石頭數，並將該石頭數表達成這些取出來的數字和。

證明：

I. 若石頭數 N 屬於 W_n，則 $N=W_n=W_{n-1}+W_{n-D}$，其中 $W_{n-1}>W_{n-D}$ 且 **$(n-1)-(n-D)=D-1$**，成立。

II. 若石頭數 N 不屬於 W_n

- 取 W_i 使得 $W_i<N<W_{i+1}$

  定義 $N_1=N-W_i$，所以 $N_1=N-W_i<W_{i+1}-W_i=W_{i+1-D}$，即 N_1 的上限為 W_{i+1-D}

  取 W_j 使得 $W_j<=N_1<W_{j+1}$，此時 N_1 可能屬於 W_n（$N_1=W_j$），也可能不屬於 W_n（$N_1>W_j$）。

  因為 N_1 的上限為 W_{i+1-D}，所以 $N_1<W_{j+1}<=W_{i+1-D}$

  所以 $j+1<=i+1-D \rightarrow i-j>=D>D-1$

- 若 N_1 屬於 W_n，則證明結束，若 N_1 不屬於 W_n，則重複上一步。

- 所以 $N=W_{m1}+W_{m2}+W_{m3}+W_{m4}+\ldots$，其中 $W_{m1}<W_{m2}<W_{m3}<W_{m4}<\ldots$且 **$m_{i+1}-m_i>D-1$**，即相鄰兩個數字的項數間距會**大於**遞迴式的項數間距。

(2) 若石頭數 N 屬於 W_n，則 $N=W_n=W_{n-1}+W_{n-D}$，其中 $W_{n-1}>W_{n-D}$ 且 **$(n-1)-(n-D)=D-1$**，即相鄰兩個數字的項數間距會**等於**遞迴式的項數間距。

I. 如果我們可以**證明 $M*W_{n-D}>=W_{n-1}$**

說明：

代表先手雖然想一次取走 W_{n-D}，讓自己在取 W_{n-1} 的時候變成後手必勝，但因為 $M*W_{n-D}>W_{n-1}$，所以代表輪到後手時可以一次就取完 W_{n-1}，因此先手不會想一次取走 W_{n-D}。

證明：

- 假設：$n=n'$時，$M*W_{n'-D}>=W_{n'-1}$ 成立

- 令 $n<=k$ 時皆成立，所以：

  $n=k$ 時，$M*W_{k-D}>=W_{k-1}$ 成立，即 $M*W_{k-D}-W_{k-1}>=0$----(A)

  $n=(k+1)-D$ 時，$M*W_{(k+1)-D-D}>=W_{(k+1)-D-1}$ 成立，即 $M*W_{(k+1)-2*D}-W_{k-D}>=0$----(B)

- 當 $n=k+1$ 時，計算：

  $M*W_{(k+1)-D}-W_{(k+1)-1}$

  $=M*(W_{(k+1)-D-1}+W_{(k+1)-D-D})-(W_{k-1}+W_{k-D})\rightarrow$將 $W_{(k+1)-D}$、$W_{(k+1)-1}$ 分別用遞迴式代入降階

  $=(M*W_{k-D}-W_{k-1})+(M*W_{(k+1)-2*D}-W_{k-D})\rightarrow$將上一式的中間兩項對調順序

  $=(A)+(B)$

  $>=0$

  所以 $n=k+1$ 時，$M*W_{(k+1)-D}>=W_{(k+1)-1}$ 成立

- 所以只要當 $n=n'$時，$M*W_{n'-D}>=W_{n'-1}$ 成立，則對所有 $n>=n'$時，$M*W_{n-D}>W_{n-1}$ 都成立。

II. 如果我們可以**證明 $M*(M/(M+1)*W_{n-D})<W_{n-1}$**

說明：

假設 I 成立，代表先手不會想一次取走 W_{n-D}，此時因為 W_{n-D} 為後手必勝石頭數，所以先手的目標會轉為讓後手在取完 W_{n-D} 的數字極大，也就是先手取 $1/(M+1)*W_{n-D}$，後手取 $M/(M+1)*W_{n-D}$，並希望自己接下來可以一次取完 W_{n-1}，但因為 $M*(M/(M+1)*W_{n-D})<W_{n-1}$，所以先手無法一次取完 W_{n-1}，於是 W_{n-1} 又是先手無法一次取完的後手必勝石頭數。

證明：

- 假設：$n=n'$時，$M*(M/(M+1)*W_{n'-D})<W_{n'-1}$ 成立
- 令 $n<=k$ 時皆成立，所以：

  $n=k$ 時，$M*(M/(M+1)*W_{k-D})<W_{k-1}$ 成立，即 $M*M/(M+1)*W_{k-D}-W_{k-1}<0$----(A)

  $n=(k+1)-D$ 時，$M*(M/(M+1)*W_{(k+1)-D-D})<W_{k+1-D-1}$ 成立，即 $M*M/(M+1)*W_{(k+1)-2*D}-W_{k-D}<0$----(B)
- 當 $n=k+1$ 時，計算：

  $M*(M/(M+1)*W_{(k+1)-D})-W_{(k+1)-1}$

  $=M*M/(M+1)*(W_{(k+1)-D-1}+W_{(k+1)-D-D})-(W_{k-1}+W_{k-D})$ → 將 $W_{(k+1)-D}$、$W_{(k+1)-1}$ 分別用遞迴式代入降階

  $=(M*M/(M+1)*W_{k-D}-W_{k-1})+(M*M/(M+1)*W_{(k+1)-2*D}-W_{k-D})$ → 將上一式的中間兩項對調順序

  =(A)+(B)

  <0

  所以 $n=k+1$ 時，$M*(M/(M+1)*W_{(k+1)-D})<W_{(k+1)-1}$ 成立
- 所以只要當 $n=n'$時，$M*(M/(M+1)*W_{n'-D})<W_{n'-1}$ 成立，則對所有 $n>=n'$時，$M*(M/(M+1)*W_{n-D})<W_{n-1}$ 都成立。

III. ***若石頭數屬於 W_n 且當 $n=n'$時，$M*W_{n'-D}>=W_{n'-1}$、$M*(M/(M+1)*W_{n'-D})<W_{n'-1}$ 成立，則代表後手必勝。***

(3) 若石頭數 N 不屬於 W_n，則 $N=W_{m1}+W_{m2}+W_{m3}+W_{m4}+\ldots$，其中 $W_{m1}<W_{m2}<W_{m3}<W_{m4}<\ldots$且 **$m_{i+1}-m_i>D-1$**，即相鄰兩個數字的項數間距會**大於**遞迴式的項數間距。。

VIII. 如果我們可以**證明 $M*W_{n-D}<W_n$**

說明：

- 先手會一次取走 W_{m1}，因為 $m_2-m_1>D-1$ 且 $M*W_{n-D}<W_n$，所以 $M*W_{m1}<W_{m2}$，代表後手無法一次取完 W_{m2}，因此先手取完 W_{m1} 後，會讓自己在 W_{m2} 變成後手必勝。
- 因為後手無法一次取完 W_{m2}，所以後手的目標會轉為讓先手在取完 W_{m2} 的數字極大（假設為 X），並希望自己接下來可以一次取完 W_{m3}，但因為 $m_3-m_2>D-1$ 且 $M*W_{n-D}<W_n$，所以 $M*X<M*W_{m2}<W_{m3}$，因此後手仍然無法一次取完 W_{m3}，故先手在 W_{m3} 依然是後手必勝。
- 依此類推，先手會讓自己在 W_{m4}、…都是後手必勝。

證明：

- 假設：$n=n'$時，$M*W_{n'-D}<W_{n'}$成立
- 令 $n<=k$ 時皆成立，所以：

  $n=k$ 時，$M*W_{k-D}<W_k$ 成立，即 $M*W_{k-D}-W_k<0$----(A)

  $n=(k+1)-D$ 時，$M*W_{(k+1)-D-D}<W_{(k+1)-D}$ 成立，即 $M*W_{(k+1)-2*D}-W_{(k+1)-D}<0$----(B)
- 當 $n=k+1$ 時，計算：

  $M*W_{(k+1)-D}-W_{(k+1)}$

  $=M*(W_{(k+1)-D-1}+W_{(k+1)-D-D})-(W_{(k+1)-1}+W_{(k+1)-D})$ → 將 $W_{(k+1)-D}$、$W_{(k+1)-1}$ 分別用遞迴式代入降階

  $=(M*W_{k-D}-W_k)+(M*W_{(k+1)-2*D}-W_{(k+1)-D})$ → 將上一式的中間兩項對調順序

  =(A)+(B)

  <0

  所以 $n=k+1$ 時，$M*W_{(k+1)-D}<W_{(k+1)}$成立

- 所以只要當 n=n'時，$M*W_{n'-D}<W_{n'}$成立，則對所有 n>=n'時，$M*W_{n-D}<W_n$都成立。

IX. **<u>若石頭數不屬於 W_n 且當 n=n'時，$M*W_{n'-D}<W_{n'}$成立，則代表先手必勝。</u>**

五、 請自行設計一種有趣的取石遊戲，並以文字及表格說明這個遊戲的必勝關鍵及取勝過程。

遊戲名稱	誰是最後一顆？
總石頭數	21 顆
每次可取石頭數	1~3 顆
勝負條件	取到最後一顆的玩家輸

如果對方在開始回合時遇到「剩下的石頭數是 4 的倍數+1」的狀況，只要每次雙方取的石頭數加起來是 4，就一定會贏。也就是說後手必勝。