

頑石點頭

五年級：六班 姓名：黃詠恩

【問題一】一堆石頭有 50 個，兩人輪流取石，每次每人至少取一個，最多取上次對方取走的石頭數的 3 倍。取走最後一個石頭的人贏得勝利。（第一次取石不可以取全部石頭）請以文字及表格說明這個遊戲的必勝關鍵及取勝過程。（3★）
例如：

石頭總數		50		張三 V.S. 李四				勝負
張三				李四				
取	5	剩下	45	取	8	剩下	37	
取	5	剩下	32	取	10	剩下	22	
取	22	剩下	0	取		剩下		
取		剩下		取		剩下		
取		剩下		取		剩下		張三勝

ANS: 必勝關鍵:

- 每次取出的石頭數目不能超過剩下的石頭全部的 $\frac{1}{3}$ ，否則對方會將剩餘石頭全部取完而獲勝。
- 每次取出的石頭數目後剩下的石頭數目，需大於取出的石頭數目的3倍。否則對方也會將剩餘石頭全部取完而獲勝。
- 用「動態推理」的歸納法方法來處理。我們從遊戲的最後（剩下1顆石頭）往回推，再確定每個剩下的石頭數「我方勝利」或是「對方勝利」，然後再根據這些位置來推算出最佳的取石策略。

先將石頭數目取出後，剩下最接近50的下方數字(理由後敘於【補充說明1】)：

1 2 3 4 6 8 11 15 21 29 40 (參考後敘【補充說明4】用Excel列出3倍的費氏 Fibonacci 數列)

如果不符合關鍵2 (如果取出石頭的數目後剩下的石頭數目，需大於取出的石頭) 則直接到關鍵5。

如果剩下石頭的數量小於等於8，則只取1個，直接到關鍵5。

- 再換由對方取石頭之後，看剩下石頭的數量，是否可以一次取完就可以獲勝。
- 如果不能一次取完，則將剩下石頭數量，拆解成多個上述不相鄰數字的相加數總和，

再取拆解中最小的數, 做為下次取石頭的數量, 如果剩下石頭的數量小於等於8, 則只取1個。(註: 上述 11 因跟上一項差小於等於3, 因對手如果一次取3顆 $11-3=8$ 我方-張三可能會輸, 如果對手也知道將石頭的數量留剩下費氏數列值)

6. 一直重覆上述關鍵4~5, 我方就會獲勝。

【問題二】一堆石頭有 100 個, 兩人輪流取石, 每次每人至少取一個, 最多取上次對方取走的石頭數的 4 倍。取走最後一個石頭的人贏得勝利。(第一次取石不可以取完全部石頭), 請以文字及表格說明這個遊戲的必勝關鍵及取勝過程。(3★)

ANS: 必勝關鍵:

1. 每次取出的石頭數目不能超過剩下的石頭全部的 $1/4$, 否則對方會將剩餘石頭全部取完而獲勝。
2. 每次取出的石頭數目後剩下的石頭數目, 需大於取出的石頭數目的4倍。否則對方也會將剩餘石頭全部取完而獲勝。
3. 先將石頭數目取出後, 剩下石頭數目最接近下方數字(理由後敘於【補充說明1】)
1 2 3 4 5 7 9 12 15 19 24 31 40 52 67 86(參考【補充說明4】用Excel列出4
倍的費氏Fibonacci數列)
如果不符合關鍵2 (如果取出石頭的數目後剩下的石頭數目, 需大於取出的石頭)
則直接到關鍵5。
如果剩下石頭的數量小於等於12, 則只取1個, 直接到關鍵5。
4. 再換由對方取石頭之後, 看剩下石頭的數量, 是否可以一次取完就可以獲勝。
5. 如果不能一次取完, 則將剩下石頭數量, 拆解成多個上述關鍵3的數列且不相鄰數字的相加數總和, 再取拆解中最小的數, 做為下次取石頭的數量, 如果剩下石頭的數量小於等於12, 則只取1個。(註: 上述 15 19 因跟上一項差小於等於4, 因 $15-3=12$, $19-4=15$, 我方張三可能會輸, 如果對手也知道將石頭的數量留剩下費氏數列值)
6. 一直重覆上述關鍵3~5, 我方就會獲勝。

下表步驟說明:

步驟1: 我方(張三)先取出14個石頭, 剩下86個石頭(關鍵3)。

步驟2: 觀察對方(李四)取完石頭後, 剩下石頭數量是多少個? 如果剩下石頭數量可以一次取完就獲勝。

步驟3: 如果不能一次取完->進行的數字拆解成上述數列不相鄰數字的相加和: 如 $30=2+4+24$, 再取出最小數2個石頭, 剩下28個石頭(關鍵5)。

步驟4: 重覆上述步驟2~3, 直到獲勝。

步驟如下:

$20=1+4+15$: 取最小數1個石頭, 剩下19個石頭

$16=1+3+12$: 取最小數1個石頭, 剩下15個石頭

$13=1+3+9$: 取最小數1個石頭, 剩下12個石頭

$12=$: 小於等於12, 則只取1個, 剩下11個石頭

(往後最多只取1個石頭, 看對方取後剩下石頭的數量, 是否可以一次取完就可以獲勝)

...

過程如下表:

石頭總數		100		張三 V.S. 李四				勝負
張三				李四				
取	14	剩下	86	取	56	剩下	30	
取	2	剩下	28	取	8	剩下	20	
取	1	剩下	19	取	3	剩下	16	
取	1	剩下	15	取	2	剩下	13	
取	1	剩下	12	取	2	剩下	10	
取	1	剩下	9	取	1	剩下	8	
取	1	剩下	7	取	1	剩下	6	
取	1	剩下	5	取	1	剩下	4	
取	4	剩下	0					張三勝

【問題三】一堆石頭有 200 個, 兩人輪流取石, 每次每人至少取一個, 最多取上次對方取走的石頭數的 5 倍。取走最後一個石頭的人贏得勝利。(第一次取石不可取完全部石頭), 請以文字及表格說明這個遊戲的必勝關鍵及取勝過程。(3★)

ANS: 必勝關鍵:

- 每次取出的石頭數目不能超過剩下的石頭全部的 $1/5$, 否則對方會將剩餘石頭全部取完而獲勝。
- 每次取出的石頭數目後剩下的石頭數目, 需大於取出的石頭數目的5倍。否則對方也會將剩餘石頭全部取完而獲勝。
- 先將石頭數目取出後, 剩下石頭數目最接近下方數字(理由後敘於【補充說明1】)
1 2 3 4 5 6 8 10 12 15 18 22 27 33 41 51 63 78 96 118 145 178(參考後敘【補充說明4】用Excel列出5倍的費氏Fibonacci數列)
如果不符合關鍵2 (如果取出石頭的數目後剩下的石頭數目, 需大於取出的石頭) 則直接到關鍵5。
如果剩下石頭的數量小於等於15, 則只取1個, 直接到關鍵5。
- 再換由對方取石頭之後, 看剩下石頭的數量, 是否可以一次取完就可以獲勝。
- 如果不能一次取完, 則將剩下石頭數量, 拆解成多個上述關鍵3的數列且不相鄰數

字的相加數總和，再取拆解中最小的數，做為下次取石頭的數量，如果剩下石頭的數量小於等於15，則只取1個。(註：上述 18 22 27 因跟上一項差小於等於5，因 $18-3=15$, $22-4=18$, $27-5=22$, 我方張三可能會輸，如果對手也知道將石頭的數量留剩下費氏數列值)

6. 一直重覆上述關鍵3~5，我方就會獲勝。

下表步驟說明：

步驟1：我方(張三)先取出22個石頭，剩下178個石頭(關鍵3)。

步驟2：觀察對方(李四)取完石頭後，剩下石頭數量是多少個？如下是取35剩143。

步驟3：取出符合關鍵3的數量，如果不符合，則進行的數字拆解(不相鄰數字的相加): $143=2+5+18+118$, 再取出最小數2個石頭，剩下141個石頭(關鍵5)。

步驟4：重覆上述步驟2~3，直到獲勝。

步驟如下：

$116=2+18+96$: 取最小數2個石頭，剩下114個石頭

$94=2+4+10+78$: 取最小數2個石頭，剩下92個石頭

... 以此類推

$15=$: 小於等於15，則只取1個，剩下14個石頭

(往後最多只取1個石頭，看對方取後剩下石頭的數量，是否可以一次取完就可以獲勝)

...

過程如下表：

石頭總數		200		張三 V. S. 李四				勝負
張三				李四				
取	22	剩下	178	取	35	剩下	143	
取	2	剩下	141	取	25	剩下	116	
取	2	剩下	114	取	20	剩下	94	
取	2	剩下	92	取	18	剩下	74	
以下類推	n	剩下	15	取	2	剩下	13	
取	1	剩下	12	取	1	剩下	11	
取	1	剩下	10	取	1	剩下	9	
取	1	剩下	8	取	1	剩下	7	
取	1	剩下	6	取	1	剩下	5	
取	5	剩下	0					張三勝

【問題四】一堆石頭有 N 個，兩人輪流取石，每次每人至少取一個，最多取上次對方取走的石頭數的 M 倍。取走最後一個石頭的人贏得勝利。(第一次取石不可取完全部石頭)，請找出這個遊戲的必勝關鍵及取勝的一般化公式。(3★)

ANS: 必勝關鍵:

1. 每次取出的石頭數目不能超過剩下的石頭全部的 $1/M$ ，否則對方會將剩餘石頭全部取完而獲勝。
2. 每次取出的石頭數目後剩下的石頭數目，需大於取出的石頭數目的 M 倍。否則對方也會將剩餘石頭全部取完而獲勝。
3. 先將石頭數目取出後，剩下石頭數目最接近下方數字列(理由後敘於【補充說明1】)：

$$1 \ F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4 \dots F_{2M} \dots F_n$$

(其中 $F_n = F_{n-1} + F_{n-k}$ ， $K = M*2 - 2$)

如果不符合關鍵2 (如果取出石頭的數目後剩下的石頭數目，需大於取出的石頭) 則直接到關鍵5。

如果剩下石頭的數量小於等於 F_{2M} ，則只取1個，直接到關鍵5。

4. 再換由對方取石頭之後，看剩下石頭的數量，是否可以一次取完就可以獲勝。
5. 如果不能一次取完，則將剩下石頭數量，拆解成多個上述關鍵3的數列且不相鄰數字的相加數總和，再取拆解中最小的數，做為下次取石頭的數量，如果剩下石頭的數量小於等於 F_{2M} ，則只取1個。
6. 一直重覆上述關鍵3~5，我方就會獲勝。
- ...

【問題五】請自行設計一種有趣的取石遊戲，並以文字及表格說明這個遊戲的必勝關鍵及取勝過程。(3★)

ANS: 題目設計：

一堆石頭有 50 個，兩人輪流取石，每次每人至少取1顆石頭，且每次最多只能取7顆石頭。取走最後一個石頭的人贏得勝利。

必勝關鍵：

1. 剩下石頭數量，是這個遊戲的關鍵。每次取出後剩下的石頭必需大於3顆石頭，否則對方會將剩餘石頭全部取完而獲勝。
2. 可以控制每次所剩餘石頭的數量，將剩餘石頭數量控制到對方無法避免的情況。
3. 應該確保每一次石頭取完結束時，剩餘的石頭數量是8顆、16顆、24顆...等（是8的倍數）。因為，當桌面上剩下8顆石頭時，無論對方取1顆、2顆、3顆...或7顆，最後的玩家都能取走剩下的石頭，使對方最後取走一顆而獲勝。
4. 一直重覆上述關鍵1~3, 我方就會獲勝。

過程如下表：

石頭總數		50		張三 V.S. 李四				勝負
張三				李四				
取	2	剩下	48	取	7	剩下	41	
取	1	剩下	40	取	6	剩下	34	
取	2	剩下	32	取	6	剩下	26	
取	2	剩下	24	取	5	剩下	19	
取	3	剩下	16	取	2	剩下	14	
取	6	剩下	8	取	1	剩下	7	
取	7	剩下	0					張三勝

留下8的倍數，
對手會輸

【補充說明1】

一開始跟家人玩【問題一】及【問題二】取石遊戲，每次的輸贏不一定，玩了幾天沒有結論，就開始求助ChatGPT，下方是使用ChatGPT詢問【問題一】取石遊戲是否有必勝方法的回答(藍色字)：

ChatGPT 說：

這是一個經典的博弈問題，我們可以通過分析遊戲的結構來找出是否有方法贏得勝利。

問題解釋：

- 有 50 顆石頭，兩個玩家輪流取石。
- 每次每個玩家必須取至少一顆石頭，但不能取超過對方上一次所取石頭數量的三倍。
- 目標是取走最後一顆石頭並獲得勝利。

分析：

這個遊戲的關鍵在於找出「勝利位置」和「失敗位置」。

1. **勝利位置**：如果輪到一個玩家取石時，剩下的石頭數量是 1，那麼這個玩家必定能夠贏，因為他可以直接取走最後一顆石頭。
2. **失敗位置**：如果剩下的石頭數量處於某個位置，無論如何取石，對方都能夠在下一回合取走最後一顆石頭，那麼這個位置就是一個失敗位置。

我們可以倒推從 1 顆石頭開始，一步步推算其他數字。

倒推過程：

- 當剩下 1 顆石頭時，取走的人贏。
- 當剩下 2 到 3 顆石頭時，這些都是贏的位置，因為第一個玩家可以直接取走所有石頭。
- 當剩下 4 顆石頭時，這是一個失敗位置，因為無論第一個玩家取多少，對方都能在下一回合取走最後一顆石頭。
- 當剩下 5 到 12 顆石頭時，這些是贏的位置，因為第一個玩家可以選擇適當的石頭數量，迫使對方進入失敗位置。
- 當剩下 13 顆石頭時，這是一個失敗位置。

以此類推，我們可以確定所有的勝利位置和失敗位置。

如何利用這些信息：

- 在遊戲開始時，剩下的石頭數量是 50。你可以根據倒推過程找出 50 是否處於勝利位置或失敗位置。如果是勝利位置，那麼第一個玩家就有方法贏；如果是失敗位置，則第二個玩家可以保證勝利。

結論：

要確定是否有方法贏得勝利，需要進一步進行詳細的推算。總的來說，這是一個可以透過動態規劃或數學推理的方法解決的問題。

ChatGPT建議使用倒推過程，可以找到那些是必勝的石頭數量，列出其步驟，最後會得到必勝的步驟，此建議有點像AI、歸納、推理。

另在網路也搜尋到了一些資訊，列在文章最後參考資料中。

下方文章中有很多說明，也是本次高愛迪斯作業的參考依據：

1. 費波納契的遊戲…齊肯多夫定理-國立台灣師範大學數學系教授 許志農
<http://pisa.math.ntnu.edu.tw/popular-science/game/2014-03-14-01-38-49/1068-19boqidekenduofudingli>
2. 費齊取石-探討齊肯多夫定理在取石對弈遊戲中的延伸-屏東縣第 61 屆中小學科學展覽會作品說明書
https://sci.ptc.edu.tw/Pthsci61/Upfile/Works/1614874828_305235_35.pdf

先依ChatGPT建議使用倒推方法來歸納可以致勝的步驟判是否有規律可言，例如假設題目【問題一】～【問題四】的先取者是張三，後取者是李四。

【問題一】的倒推分析如下：

當剩下1顆石頭時因題目的限制第1次不可全拿，所以忽略。

當剩下2顆石頭時張三第1次不可全拿，所以只能取1顆，李四後取的會獲勝。

當剩下3顆石頭時張三第1次不可全拿，所以只能取1顆或2顆，李四後取的會獲勝。

當剩下4顆石頭時張三第1次不可全拿，所以只能取1顆或2顆或3顆，李四後取的會獲勝。

當剩下5顆石頭時張三第1次不可全拿，所以取1顆後→剩下4顆給李四，此時李四會如上一行剩4顆石頭的分析，後取的會獲勝，此時張三變成後取會獲勝。

當剩下6顆石頭時張三取1顆後→剩下5顆給李四，此時李四會進入上一行剩5顆石頭後，此時變成李四先取會獲勝。

當剩下7顆石頭時張三取1顆後→剩下6顆給李四，此時李四會進入上一行剩6顆石頭後，此時張三變成後取會獲勝。

當剩下8顆石頭時張三取1顆後→剩下7顆給李四，此時李四會進入上一行剩7顆石頭後，此時由李四先取，李四會獲勝。

當剩下9顆石頭時張三取1顆後→剩下8顆給李四，此時李四會進入上一行剩8顆石頭後，此時變成由李四先取，張三後取的會獲勝。

當剩下10顆石頭時張三取1顆後→剩下9顆給李四，此時李四會進入上一行剩9顆石頭後，此時變成由李四先取，張三後取的會獲勝。
或由張三先取2顆後→剩下8顆給李四，此時李四會進入上一行剩8顆石頭後，此時變成由李四先取，張三後取的會獲勝。

當剩下11顆石頭時張三取1顆後→剩下10顆給李四，此時李四會進入上一行剩10顆石頭後，此時變成由李四先取，李四會獲勝。

或由張三先取2顆後→剩下9顆給李四，此時李四會進入上述剩9顆石頭後，此時變成由李四先取，李四會獲勝。

或由張三先取3顆後→剩下8顆給李四，此時李四會進入上述剩8顆石頭

後，此時變成由李四先取，張三會獲勝。

所以李四不一定會獲勝。因為11跟上一個值必勝值8，只相差3，所以對手有可能取3顆後→進入獲勝模式。(在【問題一】中有對此費氏數列11特別說明)

當剩下12顆石頭時張三取1顆後→剩下11顆給李四，此時李四會進入上一行剩11顆石頭後，此時變成由李四先取，張三後取的會獲勝。

或由張三先取2顆後→剩下10顆給李四，此時李四會進入上述剩10顆石頭後，此時變成由李四先取，李四會獲勝。

當剩下13顆石頭時張三取1顆後→剩下12顆給李四，此時李四會進入上一行剩12顆石頭後，此時變成由李四先取，張三或李四都有可能獲勝。

或由張三先取2顆後→剩下11顆給李四，此時李四會進入上述剩10顆石頭後，此時變成由李四先取，張三會獲勝。

或由張三先取3顆後→剩下10顆給李四，此時李四會進入上述剩10顆石頭後，此時變成由李四先取，張三或李四都有可能獲勝。

當剩下14顆石頭時張三取1顆後→剩下13顆給李四，此時李四會進入上一行剩13顆石頭後，此時變成由李四先取，張三或李四都有可能獲勝。

或由張三先取2顆後→剩下12顆給李四，此時李四會進入上述剩12顆石頭後，此時變成由李四先取，張三或李四都有可能獲勝。

或由張三先取3顆後→剩下11顆給李四，此時李四會進入上述剩11顆石頭後，此時變成由李四先取，張三變後取會獲勝。

當剩下15顆石頭時張三取1顆後→剩下14顆給李四，此時李四會進入上一行剩14顆石頭後，此時變成由李四先取，如上分析李四只要取3顆，李四變先取會獲勝。

或由張三先取2顆後→剩下13顆給李四，此時李四會進入上述剩13顆石頭後，此時變成由李四先取，如上分析李四只要取3顆，李四變先取會獲勝。

或由張三先取3顆後→剩下12顆給李四，此時李四會進入上述剩12顆石頭後，此時變成由李四先取，如上分析李四只要取3顆，李四變先取會獲勝。

當剩下16顆石頭時張三取1顆後→剩下15顆給李四，此時李四會進入上一行剩15顆石頭後，此時變成由李四先取，如上分析張三變後取會獲勝。

或由張三先取2顆後→剩下14顆給李四，此時李四會進入上述剩14顆石頭後，此時變成由李四先取，如上分析張三或李四都有可能獲勝。

或由張三先取3顆後→剩下13顆給李四，此時李四會進入上述剩13顆石頭後，此時變成由李四先取，如上分析張三或李四都有可能獲勝。

…以此類推分析，直到有50顆石頭。

經由上述倒推過程的分析後，李四(後取者)一定可以取勝的剩下石頭數是：

2 3 4 6 8 11 15... 等。

根據數字推理，可以得出上述數列類似費氏(Fibonacci)數列的變形：是3倍的費氏(Fibonacci)數列。(3倍正好符合【問題一】题目的定義「每次每人至少取一個，最

多取上次對方取走的石頭數的 3 倍」)。

經由上述【問題一】的推理結果也可以依樣畫葫蘆倒推過程推論【問題二】及【問題三】如下：

【問題二】的李四(後取者)一定可以取勝的剩下石頭數是是4倍的費氏(Fibonacci)數列。(4倍正好符合【問題二】題目的定義「每次每人至少取一個，最多取上次對方取走的石頭數的 4 倍」)。

【問題三】的李四(後取者)一定可以取勝的剩下石頭數是是5倍的費氏(Fibonacci)數列。(5倍正好符合【問題三】題目的定義「每次每人至少取一個，最多取上次對方取走的石頭數的 5 倍」)。

因為m倍的費氏(Fibonacci)數列有一個特徵(參考下方【補充說明2】的【特徵2】)當第n項 $F_n = F_{n-1} + F_{n-k}$ ， F_n 一定大於 F_{n-k} 的m倍，及 F_{n-k} 的m倍大於等於 F_{n-1}

即 $F_{n-1} \leq F_{n-k} \text{的 } m \text{ 倍} < F_n$

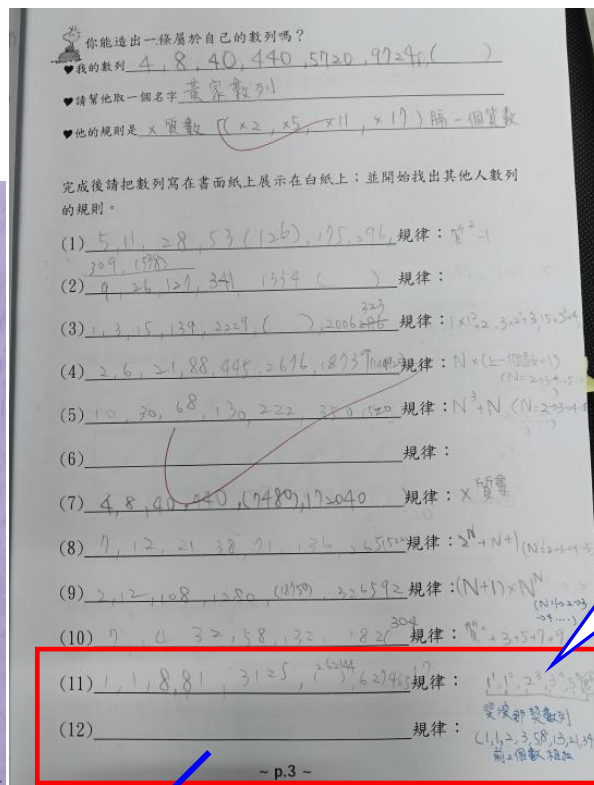
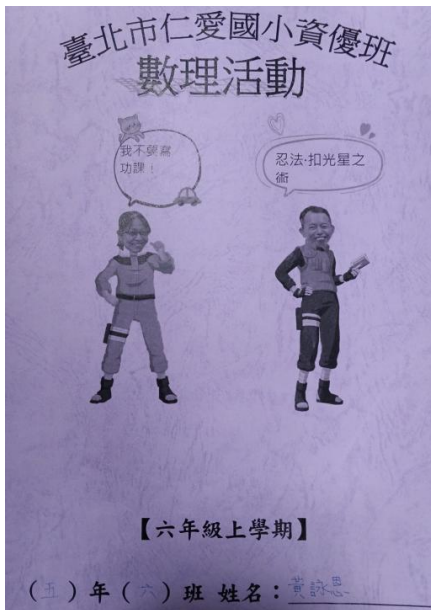
所以只要剩下石頭數是m倍的費氏(Fibonacci)數列時，後取者會獲勝。因為上述特徵 F_{n-k} 的m倍 $< F_n$ ，所以先取者張三取m倍的石頭數後仍會留下石頭無法取完，如此先取者再根據下方【補充說明2】的【特徵1】，將剩餘的石頭拆解成多個不相鄰的費氏數列值的和，再取其中最小的值，如【問題一】必勝關鍵1~6，一直重覆操作，如同遞迴(Recursion)的原理，一直到最後獲勝。

【補充說明2】

費氏(Fibonacci)數列是義大利人費波那契(Leonardo Fibonacci, 1175-1250)為描述兔子生長的數目時用上了這數列。但此數列也跟我們的生活息息相關，例如，藝術的黃金比例(任一費氏數列值除以前一個數字則會得到1.618的黃金比例)，生物世界DNA的規律，葵花頂端的種子排列出來的螺旋圖案、圓錐松果外擴的果片…等都與費波納契數列有很大的關連。

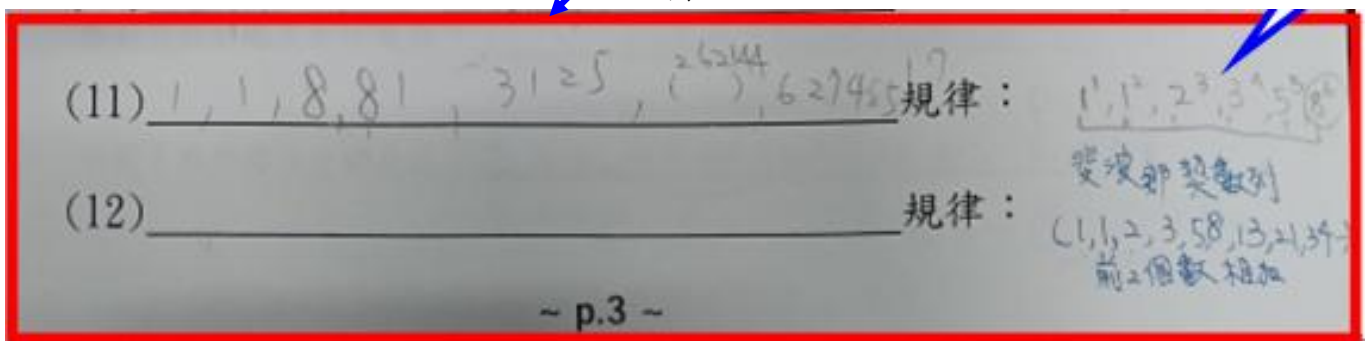
費氏數列有很多特性(特徵)，但很多不是我們要討論的範圍。下列是關於與本次高愛迪斯題相關問題與費氏數列的進一步說明如下：

第1次接觸到費氏數列是上學期資優班加修的「數理活動」第一單元「追根究柢-數列」p.3頁，老師讓我們設計自己的數列，其中第(11)題(如下圖)：是其他同學設計了一個數列題目，此題的解答是費氏數列的第n項次方列表，這是我第1次接觸到費氏數列。



第1次看到費氏 (Fibonacci) 數列是在同學出的題目 中 p. 3 第(11)題

放大圖



費氏數列在維基百科(<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%96%90%E6%B3%A2%E9%82%A3%E5%A5%91%E6%95%B0>)的說明如下：

費氏數列由0和1開始，之後的費波那契數就是由之前的兩數相加而得出。

$$F_0=0$$

$$F_1=1$$

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2} (n \geq 2)$$

當【問題一】經由倒推分析歸納後的數列

2 3 4 6 8 11 15 21 29 40..。

類似費氏數列的變形，是3倍的費氏數列。

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-4}$$

ex: $8 = 6(\text{前1項}) + 2(\text{前4項})$

$$11 = 8(\text{前1項}) + 3(\text{前4項})$$

$$15 = 11(\text{前1項}) + 4(\text{前4項})$$

...類推下一項是 $6 + 15 = 21$,

再一項是 $8+21=29$ ，

再一項是 $11+29=40$

所以50以內的數列是

2 3 4 6 8 11 15 21 29 40。(可以參考下方【補充說明4】Excel找出3倍的費氏數列)
其中紅字數值8之前的數值2 3 4 6是倒推分析後數列初值。

費氏數列有很多特性(特徵)，與本次高愛迪斯有關的是它的有二個很重要的特徵是：

【特徵1】任何數都可以找到任意不相鄰的費氏 F_n 相加的和(註:此稱為齊肯多夫定理：

參考<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E9%BD%8A%E8%82%AF%E5%A4%9A%E5%A4%AB%E5%AE%9A%E7%90%86>)。

【特徵2】 m 倍的費氏第 n 項 $F_n=F_{n-1}+F_{n-k}$ ($k=2*(m-1)$)，其中 F_{n-k} 值的 m 倍會大於等於 F_{n-1} ，但小於 F_n (註:因為此特徵 F_{n-k} 的 m 倍會小於 F_n ，當每次取上述【特徵1】不相鄰費氏數列最小值時，最小值的 m 倍會小於 F_n 值，所以對手是無法取完剩下石頭，如此有機會留下石頭給自己，用此方式反覆操作，直到剩下全拿而獲勝)。

例如：

上述3倍的費氏(Fibonacci)數列

2 3 4 6 8 11 15 21 29 40

其中

費氏數列($F_n=F_{n-1}+F_{n-k}$)	F_n	F_{n-1}	F_{n-4}	$F_n > F_{n-4}$ 的3倍 $\geq F_{n-1}$
$8=6+2$	8	6	2	$8 > 2*3 \geq 6$
$11=8+3$	11	8	3	$11 > 3*3 \geq 8$
$15=11+4$	15	11	4	$15 > 4*3 \geq 11$
$21=15+6$	21	15	6	$21 > 6*3 \geq 15$
$29=21+8$	29	21	8	$29 > 8*3 \geq 21$
$40=29+11$	40	29	11	$40 > 11*3 \geq 29$

所以只要將剩下石頭數量保持在上述3倍的費氏數列值

讓對手面對剩下石頭數量是上述3倍的費氏數列值時，我們就會因對手即使取下3倍於我們的石頭數量，一定會有剩下石頭數量沒有取完，此時我們可以將剩下石頭取完而獲勝。如同遞迴(Recursion)一樣，重覆操作上述將石頭留下費氏數列值給對手，一直到最後獲勝。

那要取多少個石頭？在上述費氏數列重要的【特徵1】(任何數都可以找到任意不相鄰的費氏 F_n 相加的和(此為齊肯多夫定理))。

因為有此特徵(齊肯多夫定理)，我們可以將剩餘的石頭數量拆成多個不相鄰的費氏數值的和，再取其中最小值的石頭，如此反覆操作，一直保持剩餘的石頭數量是3倍的費氏數列值，重覆操作一直到最後會獲勝。

例如 $24=3+21$ ：取最小數3個石頭，剩下21個石頭(因為剩下的數值也一定是費氏數列值)

【問題二】分析歸納後的數列100以內是：(可以參考下方【補充說明4】Excel找出4倍的費氏(Fibonacci)數列) $F_n=F_{n-1}+F_{n-6}$

1 2 3 4 5 7 9 12 15 19 24 31 40 52 67 86。

操作同【問題一】說明。

【問題三】分析歸納後的數列200以內是：(可以參考下方【補充說明4】Excel找出5倍的費氏(Fibonacci)數列) $F_n = F_{n-1} + F_{n-8}$

1 2 3 4 5 6 8 10 12 15 18 22 27 33 41 51 63 78 96 118 145 178。

操作同【問題一】說明。

經由上述倒推過程的分析後，如此遞迴(Recursion)的操作，當剩下石頭數是上述費氏數列值時：在面對費氏數列時的李四變成先取者，而此時轉換為後取者的張三最後會取勝。

上述費氏數列有紅字數值之前的值是初始值(初始值的取得是由倒推過程的分析後得到)再經由初始值列算出m倍的費氏數列。當小於紅字數值時(即初始值)，如果取大於1顆石頭，就會被對手人拿完全部剩下m倍石頭，所以當剩下石頭數量是小於紅字數值時，每次只能取1顆石頭，直到依對手剩下的石頭數判斷是否可以全部取完，最後會獲勝。

【補充說明3】

取石頭的遊戲可以分為常見：單堆遊戲(Bash Game)、費氏(Fibonacci)遊戲、尼姆(Nim)遊戲、威氏(Wythoff's Game)遊戲..等。(參考網路資料：拈及其各種變形遊戲https://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_03_2_02/page6.html)

列表說明如下：

種類	單堆遊戲(Bash Game)	費氏(Fibonacci)遊戲	尼姆[拈](Nim)遊戲	威氏(Wythoff's Game)遊戲
石子堆數及數量	有1堆含n個石子。	有1堆含n個石子。	有k堆各n個石子。	有2堆各n個石子。
取法	兩個人輪流從這堆物品中取物，規定每次至少取1個，最多取m個。	兩個人輪流從這堆物品中取物，規定每次至少取1個，最多取上次對方取走的石頭數的 M 倍。	兩個人輪流從某一堆取任意多的物品，規定每次至少取一個，多者不限。	兩個人輪流從某一堆或同時從兩堆中取同樣多的物品，規定每次至少取1個，多者不限。
勝負	取走最後石子的人獲勝。	取走最後石子的人獲勝。	取走最後石子的人獲勝。	取走最後石子的人獲勝。
跟本期高愛迪斯問題相關	【問題五】	【問題一】 【問題二】 【問題三】 【問題四】		

【補充說明4】

如何快速列出費氏(Fibonacci)數列，我們可以使用Excel來幫忙，雖然網路上有很多用遞迴程式列表算出第n項，但因本次高愛迪斯題目的石頭數量是50【問題一】，100【問題二】，200【問題三】，最大值是200，200數值不大可以心算輕鬆找出第n項的(Fibonacci)數列，使用Excel簡單將公式複製貼上也列出費氏數列，另變形的3倍、4倍、5倍數列將初始值填入後，也可以輕鬆列出，說明如下：

QUOTIENT				
	A	B	C	D
1	0			
2	1			
3	=A2+A1			
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				

填入初始值

A3輸入值=A2+A1，再往下複製到A4~A20

結果

A22				
	A	B	C	D
1	0			
2	1			
3	1			
4	2			
5	3			
6	5			
7	8			
8	13			
9	21			
10	34			
11	55			
12	89			
13	144			
14	233			
15	377			
16	610			
17	987			
18	1597			
19	2584			
20	4181			

可以得到費氏(Fibonacci)數列的項目值

可以用同樣方法找出3倍的費氏(Fibonacci)數列在【問題一】的項目值

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-4} :$$

QUOTIENT					
	A	B	C	D	E
1	1				
2	2				
3	3				
4	4				
5	6				
6	8				
7	=A6+A3				
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					

填入初始值

結果

A7輸入值=A6+A3，再
往下複製到A8~A20

A7			
	A	B	C
1	1		
2	2		
3	3		
4	4		
5	6		
6	8		
7	11		
8	15		
9	21		
10	29		
11	40		
12	55		
13	76		
14	105		
15	145		
16	200		
17	276		
18	381		
19	526		
20	726		

可以得到3倍費氏
(Fibonacci)數列
的項目值

可以用同樣方法找出4倍的費氏(Fibonacci)數列在【問題二】的項目值
 $F_n = F_{n-1} + F_{n-6}$:

QUOTIENT					
	A	B	C	D	E
1	1				
2	2				
3	3				
4	4				
5	5				
6	7				
7	9				
8	12				
9	=A8+A3				
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					

填入初始值

結果

A9輸入值=A8+A3，再
往下複製到A10~A20

C16			
	A	B	C
1	1		
2	2		
3	3		
4	4		
5	5		
6	7		
7	9		
8	12		
9	15		
10	19		
11	24		
12	31		
13	40		
14	52		
15	67		
16	86		
17	110		
18	141		
19	181		
20	233		

可以得到4倍費氏
(Fibonacci)數列
的項目值

可以用同樣方法找出5倍的費氏(Fibonacci)數列在【問題三】的項目值
 $F_n = F_{n-1} + F_{n-8}$:

QUOTIENT					
	A	B	C	D	E
1	1				
2	2				
3	3				
4	4				
5	5				
6	6				
7	8				
8	10				
9	12				
10	15				
11	=A10+A3				
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					

填入初始值

A11輸入值=A10+A3，
再往下複製到A12~A20



結果

A22		
	A	B
1	1	
2	2	
3	3	
4	4	
5	5	
6	6	
7	8	
8	10	
9	12	
10	15	
11	18	
12	22	
13	27	
14	33	
15	41	
16	51	
17	63	
18	78	
19	96	
20	118	

可以得到5倍費氏
(Fibonacci)數列
的項目值

參考資料：

1. 費波納契的遊戲…齊肯多夫定理-國立台灣師範大學數學系教授 許志農
<http://pisa.math.ntnu.edu.tw/popular-science/game/2014-03-14-01-38-49/1068-19boqidekenduofudingli>
2. 費齊取石-探討齊肯多夫定理在取石對弈遊戲中的延伸-屏東縣第 61 屆中小學科學展覽會作品說明書
https://sci.ptc.edu.tw/Pthsci61/Upfile/Works/1614874828_305235_35.pdf
3. 費波那契數-維基百科
<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%96%90%E6%B3%A2%E9%82%A3%E5%A5%91%E6%95%B0>
4. 齊肯多夫定理-維基百科
<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E9%BD%8A%E8%82%AF%E5%A4%9A%E5%A4%AB%E5%AE%9A%E7%90%86>
5. 兩人取石子遊戲組合數學-博弈問題
<https://blog.csdn.net/vaeloverforever/article/details/78241794>
6. 拈及其各種變形遊戲-張鎮華
https://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_03_2_02/index.html
7. [離散數學] 費氏數列 Fibonacci Sequence
<https://finalfrank.pixnet.net/blog/post/32079375>
8. 拈系列數學遊戲的研究-花蓮縣慈濟大學附屬高級中學(附設國中)-60 屆中小學科學展覽會作品說明書
<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/60/pdf/NPHSF2020-030408.pdf?611>
9. 遞迴-維基百科
<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E9%80%92%E5%BD%92>

註：可以先和同學或爸媽玩個幾盤，再從遊戲中瞭解變化及取勝的關鍵。

截止日期：114 年 4 月 25 日(星期五)下午 4：00