

高愛迪斯第 57 期【數學題目】

頑石點頭

五年級二班 姓名：許家維

【問題一】一堆石頭有 50 個，兩人輪流取石，每次每人至少取一個，最多取上次對方取走的石頭數的 3 倍。取走最後一個石頭的人贏得勝利。(第一次取石不可以取完全部石頭)請以文字及表格說明這個遊戲的必勝關鍵及取勝過程。(3★)

答：

一. 分析

石頭數量	甲	剩下石頭數量	乙	剩下石頭數量	勝負	取後剩餘的必勝石頭數量
2	1	1	1	0	乙贏	V
3	1	2	2	0	乙贏	V
	2	1	1	0	乙贏	
4	1	3	3	0	乙贏	V
	2	2	2	0	乙贏	
	3	1	1	0	乙贏	
5	1	4	甲取 1 個石頭讓剩餘石頭數量為 4 個，此時甲變後取，甲必勝		甲贏	
6	1	5	1	4	乙贏	V
	2~5	4~1	全拿	0	乙贏	
7	1	6	甲取 1 個石頭讓剩餘石頭數量為 6 個，此時甲變後取，甲必勝		甲贏	
8(6+2)	1	7	1	6	乙贏	V
	2~7	6~1	全拿	0	乙贏	

9	1	8	甲取 1 個石頭讓剩餘石頭數量為 8 個，此時甲變後取，甲必勝		甲贏	
10	2	8	甲取 2 個石頭讓剩餘石頭數量為 8 個，此時甲變後取，甲必勝		甲贏	
11(8+3)	1	10	2	8	乙贏	V
	2	9	1	8	乙贏	
	3~10	8~1	全拿	0	乙贏	
12	1	11	甲取 1 個石頭讓剩餘石頭數量為 11 個，此時甲變後取，甲必勝		甲贏	
13	2	11	甲取 2 個石頭讓剩餘石頭數量為 11 個，此時甲變後取，甲必勝		甲贏	
14	3	11	甲取 3 個石頭讓剩餘石頭數量為 11 個，此時甲變後取，甲必勝		甲贏	
15(11+4)	1	14	3	11	乙贏	V
	2	13	2	11	乙贏	
	3	12	1	11	乙贏	
	4~14	11~1	全拿	0	乙贏	
16	1	15	甲取 1 個石頭讓剩餘石頭數量為 15 個，此時甲變後取，甲必勝		甲贏	
17	2	15	甲取 2 個石頭讓剩餘石頭數量為 15 個，此時甲變後取，甲必勝		甲贏	
18	3	15	甲取 3 個石頭讓剩餘石頭數量為 15 個，此時甲變後取，甲必勝		甲贏	
19	4	15	甲取 4 個石頭讓剩餘石頭數量為 15 個，此時甲變後取，甲必勝		甲贏	

20(15+4+1)	1	19(15+4)	<p>1. 甲取 5 個石頭時雖然可讓剩餘石頭數量為 15 個，但乙可全拿剩餘 15 個石頭，此時乙贏</p> <p>2. 將石頭視為 15、4 和 1 個共 3 組，甲取 1 個石頭讓剩餘石頭為 15+4 個，此時乙只能取 1~3 個石頭，甲一定可以取完 4 個那 1 組石頭的最後 1 個讓剩餘石頭數量為 15 個，甲必勝</p>	甲贏	
21(15+6)	1	20	將石頭視為 15 和 6 個共 2 組，乙為後取，一定能取完 6 個石頭那組的最後 1 個，乙必勝	乙贏	V
	2	19		乙贏	
	3	18		乙贏	
	4	17		乙贏	
	5	16		乙贏	
	6~20	15~1	全拿 0	乙贏	
22	1	21	甲可以讓剩餘石頭數量為 21 個，此時甲變後取，甲必勝	甲贏	
23	2	21		甲贏	
24	3	21		甲贏	
25	4	21		甲贏	
26	5	21		甲贏	
27	6	21		甲贏	
28(21+6+1)	1	27(21+6)	將石頭視為成 21、6 和 1 個共 3 組，甲取 1 個石頭讓剩餘石頭為 21+6 個，此時 6 個石頭那一組甲變後取，甲一定能取完 6 個石頭那一組的最後 1 個，讓剩	甲贏	

			餘石頭數量為 21 個， 甲必勝		
29(21+8)	1	28	將石頭視為 21 和 8 個共 2 組，乙為後取，一定 能取完 8 個石頭那組的 最後 1 個，乙必勝	乙贏	V
	2	27		乙贏	
	3	26		乙贏	
	4	25		乙贏	
	5	24		乙贏	
	6	23		乙贏	
	7	22		乙贏	
	8~28	21~1	全拿	0	乙贏
30	1	29	甲為先取，可讓剩餘石 頭數量為 29 個，甲必 勝	甲贏	
31	2	29		甲贏	
32	3	29		甲贏	
33	4	29		甲贏	
34	5	29		甲贏	
35	6	29		甲贏	
36	7	29		甲贏	
37	8	29		甲贏	
38(29+8+1)	1	37(29+8)	甲為先取，可讓剩餘石 頭數量便成 37 個(可視 為 29+8 個 2 組)，此時 8 個石頭那一組甲變後 取，甲一定能取完 8 個 石頭那一組的最後 1 個，讓剩餘石頭數量為 29 個，甲必勝	甲贏	
39(29+8+2)	2	37(29+8)		甲贏	
40(29+11)	1	39	將石頭視為 29 和 11 個 共 2 組，乙為後取，一 定能取完 11 個石頭那 組的最後 1 個，乙必勝	乙贏	V
	2	38		乙贏	
	3	37		乙贏	
	4	36		乙贏	
	5	35		乙贏	
	6	34		乙贏	
	7	33		乙贏	
	8	32		乙贏	

	9	31			乙贏
	10	30			乙贏
	11~39	29~1	全拿	0	乙贏
41	1	40	甲為先取，可讓剩餘石頭數量為 40 個，甲必勝		甲贏
42	2	40			甲贏
43	3	40			甲贏
44	4	40			甲贏
45	5	40			甲贏
46	6	40			甲贏
47	7	40			甲贏
48	8	40			甲贏
49	9	40			甲贏
50	10	40			甲贏

二. 說明

1. 因為每次取石頭最多可以取上次對方取走的石頭數的 3 倍，所以每次取出的石頭數量不能等於或超過剩下石頭數量的 1/4。
2. 石頭數量是 2、3、4 時，先取石頭的人因為不能取完全部石頭且石頭總數小於或等於 1 的 4 倍，所以後取石頭的人會贏，也就是在石頭剩餘數量等於 5 時，只要取 1 個石頭讓剩下的石頭等於 4 個就會贏。石頭數量 2、3、4 可以稱為必勝數量。
3. 若取出的石頭數量的 4 倍大於或等於石頭總數量時，就算剩餘的石頭是必勝數量或必勝數量的組合，仍然會輸。因此在推估必勝數量的石頭時，必須同時符合取出的石頭數量的 4 倍不能大於或等於石頭總數量及剩餘的石頭數量是先前推估出必勝數量或必勝數量的組合。
4. 石頭數量較多時，可將石頭分組，當石頭剛好是 2 組或 2 組以上的必勝數量的組合時，後取的必勝。
5. 當石頭數量不是必勝數量的組合時，先取石頭的人有決定權，只要讓剩餘的石頭是必勝數量或必勝數量的組合，先取的就能取勝。
6. 根據上表的分析，可以歸納出取石頭時只要讓剩餘的石頭是下表的必勝數量時就可以贏得遊戲。

石頭數	2	3	4	6	8	11	15	21	29	40
-----	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----

三. 範例

石頭總數		50		張三 VS. 李四				勝負
張三				李四				張三勝
取	10	剩下	40	取	9	剩下	31	
取	2	剩下	29	取	5	剩下	24	
取	3	剩下	21	取	6	剩下	15	
取	15	剩下	0	取		剩下		

【問題二】一堆石頭有 100 個，兩人輪流取石，每次每人至少取一個，最多取上次對方取走的石頭數的 4 倍。取走最後一個石頭的人贏得勝利。(第一次取石不可以取完全部石頭),請以文字及表格說明這個遊戲的必勝關鍵及取勝過程。(3★)

答：

一. 分析

石頭數量	甲	剩下石頭數量	乙	剩下石頭數量	勝負	取後剩餘必勝的石頭數量
2	1	1	1	0	乙贏	V
3	1	2	2	0	乙贏	V
	2	1	1	0	乙贏	
4	1	3	3	0	乙贏	V
	2	2	2	0	乙贏	
	3	1	1	0	乙贏	
5	1	4	4	0	乙贏	V
	2	3	3	0	乙贏	
	3	2	2	0	乙贏	
	4	1	1	0	乙贏	
6	1	5	甲取 1 個石頭讓剩餘石頭數量為 5 個，此時甲變後取，甲必勝		甲贏	
7	1	6	1	5	乙贏	V
	2~6	5	全拿	0	乙贏	
8	1	7	甲取 1 個石頭讓剩餘石頭數量為 7 個，此時甲變後取，甲必勝		甲贏	
9	1	8	1	7	乙贏	V
	2~8	7~1	全拿	0	乙贏	

10	1	9	甲取 1 個石頭讓剩餘石頭數量為 9 個，此時甲變後取，甲必勝		甲贏	
11	2	9	甲取 2 個石頭讓剩餘石頭數量為 9 個，此時甲變後取，甲必勝		甲贏	
12	1	11	2	9	乙贏	V
	2	10	1	9	乙贏	
	3~11	9~1	全拿	0	乙贏	
13	1	12	甲取 1 個石頭讓剩餘石頭數量為 12 個，此時甲變後取，甲必勝		甲贏	
14	2	12	甲取 2 個石頭讓剩餘石頭數量為 12 個，此時甲變後取，甲必勝		甲贏	
15(12+3)	1	14	2	12	乙贏	V
	2	13	1	12	乙贏	
	3~14	12~1	全拿	0	乙贏	
16	1	15	甲取 1 個石頭讓剩餘石頭數量為 15 個，此時甲變後取，甲必勝		甲贏	
17	2	15	甲取 2 個石頭讓剩餘石頭數量為 15 個，此時甲變後取，甲必勝		甲贏	
18	3	15	甲取 3 個石頭讓剩餘石頭數量為 15 個，此時甲變後取，甲必勝		甲贏	
19(15+4)	1	18	3	15	乙贏	V
	2	17	3	15	乙贏	
	3	16	3	15	乙贏	
	4~18	15~1	全拿	0	乙贏	
20	1	19	甲取 1 個石頭讓剩餘石頭數量為 19 個，此時甲變後取，甲必勝		甲贏	

21	2	19	甲取 2 個石頭讓剩餘石頭數量為 19 個，此時甲變後取，甲必勝		甲贏	
22	3	19	甲取 3 個石頭讓剩餘石頭數量為 19 個，此時甲變後取，甲必勝		甲贏	
23	4	19	甲取 4 個石頭讓剩餘石頭數量為 19 個，此時甲變後取，甲必勝		甲贏	
24(19+5)	1	23	4	19	乙贏	V
	2	22	3	19	乙贏	
	3	21	2	19	乙贏	
	4	20	1	19	乙贏	
	5~23	19~1	全拿	0	乙贏	
25	1	24	甲為先取，可讓剩餘石頭數量為 24 個，甲必勝		甲贏	
26	2	24			甲贏	
27	3	24			甲贏	
28	4	24			甲贏	
29	5	24			甲贏	
30(24+5+1)	1	29(24+5)	甲為先取，可讓剩餘石頭數量便成 29 個(可視為 24+5 個 2 組)，此時 5 個石頭那一組甲變後取，甲一定能取完 5 個石頭那一組的最後 1 個，讓剩餘石頭數量為 24 個，甲必勝		甲贏	
31(24+7)	1	30	將石頭視為 24 和 7 個共 2 組，乙為後取，一定能取完 7 個石頭那組的最後 1 個，乙必勝		乙贏	V
	2	29			乙贏	
	3	28			乙贏	
	4	27			乙贏	
	5	26			乙贏	
	6	25			乙贏	
	7~30	24~1			全拿	

32	1	31	甲為先取，可讓剩餘石頭數量為 31 個，甲必勝		甲贏	
33	2	31			甲贏	
34	3	31			甲贏	
35	4	31			甲贏	
36	5	31			甲贏	
37	6	31			甲贏	
38	7	31			甲贏	
39(31+7+1)	1	38(31+7)	甲為先取，可讓剩餘石頭數量便成 38 個(可視為 31+7 個 2 組)，此時 7 個石頭那一組甲變後取，甲一定能取完 7 個石頭那一組的最後 1 個，讓剩餘石頭數量為 31 個，甲必勝		甲贏	
40(31+9)	1	39	將石頭視為 31 和 9 個共 2 組，乙為後取，一定能取完 9 個石頭那組的最後 1 個，乙必勝		乙贏	V
	2	38			乙贏	
	3	37			乙贏	
	4	36			乙贏	
	5	35			乙贏	
	6	34			乙贏	
	7	33			乙贏	
	8	32			乙贏	
	9~39	31~1	全拿	0	乙贏	
41	1	40	甲為先取，可讓剩餘石頭數量為 40 個，甲必勝		甲贏	
42	2	40			甲贏	
43	3	40			甲贏	
44	4	40			甲贏	
45	5	40			甲贏	
46	6	40			甲贏	
47	7	40			甲贏	
48	8	40			甲贏	
49	9	40			甲贏	
50(40+9+1)	1	49(40+9)			甲贏	

51(40+9+2)	2	49(40+9)	甲為先取，可讓剩餘石頭數量便成 49 個(可視為 40+9 個 2 組)，此時 9 個石頭那一組甲變後取，甲一定能取完 9 個石頭那一組的最後 1 個，讓剩餘石頭數量為 40 個，甲必勝	甲贏	
52(40+12)	1	51	將石頭視為 40 和 12 個共 2 組，乙為後取，一定能取完 12 個石頭那組的最後 1 個，乙必勝	乙贏	V
	2	50		乙贏	
	3	49		乙贏	
	4	48		乙贏	
	5	47		乙贏	
	6	46		乙贏	
	7	45		乙贏	
	8	44		乙贏	
	9	43		乙贏	
	10	42		乙贏	
	11	41		乙贏	
		12~51	41~1	全拿 0	
53	1	52	甲為先取，可讓剩餘石頭數量為 52 個，甲必勝	甲贏	
54	2	52		甲贏	
55	3	52		甲贏	
56	4	52		甲贏	
57	5	52		甲贏	
58	6	52		甲贏	
59	7	52		甲贏	
60	8	52		甲贏	
61	9	52		甲贏	
62	10	52		甲贏	
63	11	52		甲贏	
64	12	52		甲贏	
65(52+12+1)	1	64(52+12)	甲為先取，可讓剩餘石頭數量便成 64 個(可視為	甲贏	
66(52+12+2)	2	64(52+12)		甲贏	

			為 52+12 個 2 組), 此時 12 個石頭那一組甲變後取, 甲一定能取完 12 個石頭那一組的最後 1 個, 讓剩餘石頭數量為 40 個, 甲必勝		
67(52+15)	1~14	66~53	將石頭視為 52 和 15 個共 2 組, 乙為後取, 一定能取完 15 個石頭那組的最後 1 個, 乙必勝	乙贏	V
	15~66	52~1	全拿 0	乙贏	
68~82	1~15	67	甲為先取, 可讓剩餘石頭數量為 67 個, 甲必勝	甲贏	
83(67+15+1)	1	82(67+15)	甲為先取, 可讓剩餘石頭數量便成 82 個(可視為 67+15 個 2 組), 此時 15 個石頭那一組甲變後取, 甲一定能取完 15 個石頭那一組的最後 1 個, 讓剩餘石頭數量為 67 個, 甲必勝	甲贏	
84(67+15+2)	2	82(67+15)		甲贏	
85(67+15+3)	3	82(67+15)		甲贏	
86(67+19)	1~18	85~68	將石頭視為 67 和 19 個共 2 組, 乙為後取, 一定能取完 19 個石頭那組的最後 1 個, 乙必勝	乙贏	V
	19~85	67~1	全拿 0	乙贏	
87~100	1~14	86	甲為先取, 可讓剩餘石頭數量為 86 個, 甲必勝	甲贏	

二. 說明

1. 因為每次取石頭最多可以取上次對方取走的石頭數的 4 倍，所以每次取出的石頭數量不能等於或超過剩下石頭數量的 $1/5$ 。
2. 石頭數量是 2、3、4、5 時，先取石頭的人因為不能取完全部石頭且石頭總數小於或等於 1 的 5 倍，所以後取石頭的人會贏，也就是在石頭剩餘數量等於 6 時，只要取 1 個石頭讓剩下的石頭等於 5 個就會贏。石頭數量 2、3、4、5 可以稱為必勝數量。
3. 若取出的石頭數量的 5 倍大於或等於石頭總數量時，就算剩餘的石頭是必勝數量或必勝數量的組合，仍然會輸。因此在推估必勝數量的石頭時，必須同時符合取出的石頭數量的 5 倍不能大於或等於石頭總數量及剩餘的石頭數量是先前推估出必勝數量或必勝數量的組合。
4. 石頭數量較多時，可將石頭分組，當石頭剛好是 2 組或 2 組以上的必勝數量的組合時，後取的必勝。
5. 當石頭數量不是必勝數量的組合時，先取石頭的人有決定權，只要讓剩餘的石頭是必勝數量或必勝數量的組合，先取的就能取勝。
6. 根據上表的分析，可以歸納出取石頭時只要讓剩餘的石頭是下表的必勝數量時就可以贏得遊戲。

石頭數	2	3	4	5	7	9	12	15	19	24
	31	40	52	67	86					

三. 範例

石頭總數		100		張三 VS. 李四				勝負
		張三		李四				張三勝
取	14	剩下	86	取	17	剩下	69	
取	2	剩下	67	取	6	剩下	61	
取	9	剩下	52	取	11	剩下	41	
取	41	剩下	0	取		剩下		

【問題三】一堆石頭有 200 個，兩人輪流取石，每次每人至少取一個，最多取上次對方取走的石頭數的 5 倍。取走最後一個石頭的人贏得勝利。(第一次取石不可以取完全部石頭),請以文字及表格說明這個遊戲的必勝關鍵及取勝過程。(3★)

答：

一. 分析

石頭數量	甲	剩下石頭數量	乙	剩下石頭數量	勝負	取後剩餘必勝的石頭數量
2	1	1	1	0	乙贏	V
3	1	2	2	0	乙贏	V
	2	1	1	0	乙贏	
4	1	3	3	0	乙贏	V
	2	2	2	0	乙贏	
	3	1	1	0	乙贏	
5	1	4	4	0	乙贏	V
	2	3	3	0	乙贏	
	3	2	2	0	乙贏	
	4	1	1	0	乙贏	
6	1	5	5	0	乙贏	V
	2	4	4	0	乙贏	
	3	3	3	0	乙贏	
	4	2	2	0	乙贏	
	5	1	1	0	乙贏	
7	1	6	甲取 1 個石頭讓剩餘石頭數量為 6 個，此時甲變後取，甲必勝		甲贏	
8	1	7	1	6	乙贏	V
	2~7	6~1	全拿	0	乙贏	

9	1	8	甲取 1 個石頭讓剩餘石頭數量為 8 個, 此時甲變後取, 甲必勝		甲贏	
10	1	9	1	8	乙贏	V
	2~9	8~1	全拿	0	乙贏	
11	1	10	甲取 1 個石頭讓剩餘石頭數量為 10 個, 此時甲變後取, 甲必勝		甲贏	
12	1	11	1	10	乙贏	V
	2~11	10~1	全拿	0	乙贏	
13	1	12	甲取 1 個石頭讓剩餘石頭數量為 12 個, 此時甲變後取, 甲必勝		甲贏	
14	2	12	甲取 1 個石頭讓剩餘石頭數量為 12 個, 此時甲變後取, 甲必勝		甲贏	
15	1	14	2	12	乙贏	V
	2	13	1	12	乙贏	
	3~14	12~1	全拿	0	乙贏	
16	1	15	甲為先取, 可讓剩餘石頭數量為 15 個, 甲必勝		甲贏	
17	2	15			甲贏	
18(15+3)	1	17	2	15	乙贏	V
	2	16	1	15	乙贏	
	3~17	15~1	全拿	0	乙贏	
19	1	18	甲為先取, 可讓剩餘石頭數量為 18 個, 甲必勝		甲贏	
20	2	18			甲贏	
21	3	18			甲贏	
22(18+4)	1	21	3	18	乙贏	V
	2	20	2	18	乙贏	
	3	19	1	18	乙贏	

	4~21	18~1	全拿	0	乙贏	
23	1	22	甲為先取，可讓剩餘石頭數量為 22 個，甲必勝		甲贏	
24	2	22			甲贏	
25	3	22			甲贏	
26	4	22			甲贏	
27(22+5)	1	26	將石頭視為 22 和 5 個共 2 組，乙為後取，一定能取完 5 個石頭那組的最後 1 個，乙必勝		乙贏	V
	2	25			乙贏	
	3	24			乙贏	
	4	23			乙贏	
	5~26	22~1	全拿	0	乙贏	
28	1	27	甲為先取，可讓剩餘石頭數量為 27 個，甲必勝		甲贏	
29	2	27			甲贏	
30	3	27			甲贏	
31	4	27			甲贏	
32	5	27			甲贏	
33(27+6)	1	32	將石頭視為 27 和 6 個共 2 組，乙為後取，一定能取完 6 個石頭那組的最後 1 個，乙必勝		乙贏	V
	2	31			乙贏	
	3	30			乙贏	
	4	29			乙贏	
	5	28			乙贏	
	6~32	27~1	全拿	0	乙贏	
34	1	33	甲為先取，可讓剩餘石頭數量為 33 個，甲必勝		甲贏	
35	2	33			甲贏	
36	3	33			甲贏	
37	4	33			甲贏	
38	5	33			甲贏	
39	6	33			甲贏	
40(33+6+1)	1	39	甲為先取，可讓剩餘石頭數量便成 39 個 (可視為 33+6 個 2 組)，此時 6 個石頭那一組甲變後取，甲一定能取完 6 個石頭		甲贏	

			那一組的最後 1 個， 讓剩餘石頭數量為 33 個，甲必勝		
41(33+8)	1	40	將石頭視為 33 和 8 個共 2 組，乙為後 取，一定能取完 8 個 石頭那組的最後 1 個，乙必勝	乙贏	V
	2	39		乙贏	
	3	38		乙贏	
	4	37		乙贏	
	5	36		乙贏	
	6	35		乙贏	
	7	34		乙贏	
	8~40	33~1	全拿 0	乙贏	
42	1	41	甲為先取，可讓剩餘 石頭數量為 41 個， 甲必勝	甲贏	
43	2	41		甲贏	
44	3	41		甲贏	
45	4	41		甲贏	
46	5	41		甲贏	
47	6	41		甲贏	
48	7	41		甲贏	
49	8	41		甲贏	
50(41+8+1)	1	49	甲為先取，可讓剩餘 石頭數量便成 49 個 (可視為 41+8 個 2 組)，此時 8 個石頭 那一組甲變後取，甲 一定能取完 8 個石頭 那一組的最後 1 個， 讓剩餘石頭數量為 41 個，甲必勝	甲贏	
51(41+10)	1	50	將石頭視為 41 和 10 個共 2 組，乙為後 取，一定能取完 10 個石頭那組的最後 1 個，乙必勝	乙贏	V
	2	49		乙贏	
	3	48		乙贏	
	4	47		乙贏	
	5	46		乙贏	
	6	45		乙贏	

	7	44			乙贏	
	8	43			乙贏	
	9	42			乙贏	
	10~50	41~1	全拿	0	乙贏	
52	1	51	甲為先取，可讓剩餘石頭數量為 51 個，甲必勝		甲贏	
53	2	51			甲贏	
54	3	51			甲贏	
55	4	51			甲贏	
56	5	51			甲贏	
57	6	51			甲贏	
58	7	51			甲贏	
59	8	51			甲贏	
60	9	51			甲贏	
61	10	51			甲贏	
62(51+10+1)	1	61	甲為先取，可讓剩餘石頭數量便成 61 個 (可視為 51+10 個 2 組)，此時 10 個石頭那一組甲變後取，甲一定能取完 10 個石頭那一組的最後 1 個，讓剩餘石頭數量為 51 個，甲必勝		甲贏	
63(51+12)	1~10	62~53	將石頭視為 51 和 12 個共 2 組，乙為後取，一定能取完 12 個石頭那組的最後 1 個，乙必勝		乙贏	V
	11~62	52~1	全拿	0	乙贏	
64~75	1~12	63	甲為先取，可讓剩餘石頭數量為 63 個，甲必勝		甲贏	
76(63+12+1)	1	75	甲為先取，可讓剩餘石頭數量便成 75 個		甲贏	
77(63+12+2)	2	75			甲贏	

			(可視為 63+12 個 2 組), 此時 12 個石頭那一組甲變後取, 甲一定能取完 12 個石頭那一組的最後 1 個, 讓剩餘石頭數量為 63 個, 甲必勝		
78(63+15)	1~14	77~64	將石頭視為 63 和 15 個共 2 組, 乙為後取, 一定能取完 15 個石頭那組的最後 1 個, 乙必勝	乙贏	V
	15~77	63~1	全拿 0	乙贏	
79~93	1~15	78	甲為先取, 可讓剩餘石頭數量為 78 個, 甲必勝	甲贏	
94(78+15+1)	1	93	甲為先取, 可讓剩餘石頭數量便成 93 個 (可視為 78+15 個 2 組), 此時 15 個石頭那一組甲變後取, 甲一定能取完 15 個石頭那一組的最後 1 個, 讓剩餘石頭數量為 78 個, 甲必勝	甲贏	
95(78+15+2)	2	93		甲贏	
96(78+18)	1~17	95~79	將石頭視為 78 和 18 個共 2 組, 乙為後取, 一定能取完 18 個石頭那組的最後 1 個, 乙必勝	乙贏	V
	18~95	78~1	全拿 0	乙贏	
97~114	1~18	96	甲為先取, 可讓剩餘石頭數量為 96 個, 甲必勝	甲贏	

115(96+18+1)	1	114	甲為先取，可讓剩餘石頭數量便成 114 個 (可視為 96+18 個 2 組)，此時 18 個石頭那一組甲變後取，甲一定能取完 18 個石頭那一組的最後 1 個，讓剩餘石頭數量為 96 個，甲必勝	甲贏	
116(96+18+2)	2	114		甲贏	
117(96+18+3)	3	114		甲贏	
118(96+22)	1~21	117~97	將石頭視為 96 和 22 個共 2 組，乙為後取，一定能取完 22 個石頭那組的最後 1 個，乙必勝	乙贏	V
	22~117	96~1	全拿 0	乙贏	
119~140	1~22	118	甲為先取，可讓剩餘石頭數量為 118 個，甲必勝	甲贏	
141(118+22+1)	1	140	甲為先取，可讓剩餘石頭數量便成 140 個 (可視為 118+22 個 2 組)，此時 22 個石頭那一組甲變後取，甲一定能取完 22 個石頭那一組的最後 1 個，讓剩餘石頭數量為 118 個，甲必勝	甲贏	
142(118+22+2)	2	140		甲贏	
143(118+22+3)	3	140		甲贏	
144(118+22+4)	4	140		甲贏	
145(118+27)	1~26	144~119	將石頭視為 118 和 27 個共 2 組，乙為後取，一定能取完 27 個石頭那組的最後 1 個，乙必勝	乙贏	V
	27~144	118~1	全拿 0	乙贏	

146~172	1~27	145	甲為先取，可讓剩餘石頭數量為 145 個，甲必勝		甲贏	
173(145+27+1)	1	172	甲為先取，可讓剩餘石頭數量便成 172 個 (可視為 145+27 個 2 組)，此時 27 個石頭那一組甲變後取，甲一定能取完 27 個石頭那一組的最後 1 個，讓剩餘石頭數量為 145 個，甲必勝		甲贏	
174(145+27+2)	2	172			甲贏	
175(145+27+3)	3	172			甲贏	
176(145+27+4)	4	172			甲贏	
177(145+27+5)	5	172			甲贏	
178(145+33)	1~32	177~146	將石頭視為 145 和 33 個共 2 組，乙為後取，一定能取完 33 個石頭那組的最後 1 個，乙必勝		乙贏	V
	33~177	145~1	全拿	0	乙贏	
179~200	1~22	178	甲為先取，可讓剩餘石頭數量為 178 個，甲必勝		甲贏	

二. 說明

1. 因為每次取石頭最多可以取上次對方取走的石頭數的 5 倍，所以每次取出的石頭數量不能等於或超過剩下石頭數量的 1/6。
2. 石頭數量是 2、3、4、5、6 時，先取石頭的人因為不能取完全部石頭且石頭總數小於或等於 1 的 6 倍，所以後取石頭的人會贏，也就是在石頭剩餘數量等於 6 時，只要取 1 個石頭讓剩下的石頭等於 5 個就會贏。石頭數量 2、3、4、5、6 可以稱為必勝數量。
3. 若取出的石頭數量的 6 倍大於或等於石頭總數量時，就算剩餘的石頭是必勝數量或必勝數量的組合，仍然會輸。因此在推估必勝數量的石頭時，必須同時符合取出的石頭數量的 6 倍不能大於或等於石頭總數量及剩餘的石頭數量是先前推估出必勝數量或必勝數量的組合。

4. 石頭數量較多時，可將石頭分組，當石頭剛好是 2 組或 2 組以上的必勝數量的組合時，後取的必勝。
5. 當石頭數量不是必勝數量的組合時，先取石頭的人有決定權，只要讓剩餘的石頭是必勝數量或必勝數量的組合，先取的就能取勝。
6. 根據上表的分析，可以歸納出取石頭時只要讓剩餘的石頭是下表的必勝數量時就可以贏得遊戲。

	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18
石頭數	22	27	33	41	51	63	78	96	118	145
	178									

三. 範例

石頭總數		200		張三 VS. 李四				勝負
張三				李四				張三勝
取	22	剩下	178	取	10	剩下	168	
取	23	剩下	145	取	20	剩下	125	
取	7	剩下	118	取	22	剩下	96	
取	96	剩下	0	取		剩下		

【問題四】一堆石頭有 N 個，兩人輪流取石，每次每人至少取一個，最多取上次對方取走的石頭數的 M 倍。取走最後一個石頭的人贏得勝利。(第一次取石不可取完全部石頭)，請找出這個遊戲的必勝關鍵及取勝的一般化公式。(3★)

答：

一. 根據【問題一】、【問題二】和【問題三】，列出乙必勝的數列如下

X(項數) M (倍數)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	2	3	4	6	8	11	15	21	29	40					
4	2	3	4	5	7	9	12	15	19	24	31	40	52	67	86
5	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	33	41	51

X(項數) M (倍數)	16	17	18	19	20	21
3						
4						
5	63	78	96	118	145	178

二. 將 3 倍到 5 倍時乙可獲勝的數列列出並給予定義

M(倍數)	一般化公式
3	$F_1=2, F_2=3, F_3=4, F_4=6, F_5=8, F_6=11$ $F_x=F_{x-1}+F_{x-4}, x \geq 6$
4	$F_1=2, F_2=3, F_3=4, F_4=5, F_5=7, F_6=9, F_7=12, F_8=15$ $F_x=F_{x-1}+F_{x-6}, x \geq 8$
5	$F_1=2, F_2=3, F_3=4, F_4=5, F_5=6, F_6=8, F_7=10, F_8=12, F_9=15,$ $F_{10}=18$ $F_x=F_{x-1}+F_{x-8}, x \geq 10$

三. 從上面結果推測 M 倍時，乙的必勝數列可能是 $F_x=F_{x-1}+F_{x-2(m-1)}, x \geq m*2$

【問題五】請自行設計一種有趣的取石遊戲，並以文字及表格說明這個遊戲的必勝關鍵及取勝過程。(3★)

答：

一. 遊戲題目與取石規則

有 3 堆石頭，數量分別為 3 個、4 個和 5 個，兩人輪流取石，每次每人選擇其中一堆石頭，從被選中的那一堆石頭至少取 1 個，最多可取走該堆的所有石頭，取走最後一個石頭的人贏得勝利。

二. 分析(必勝組合以紅色表示並依剩餘石頭數由小到大排列)

2 堆石頭	甲	剩餘石頭數量	乙	剩餘石頭數量	勝負	取後剩餘必勝的石頭數組合
1、1	1、0	0、1	0、1	0、0	乙贏	V
1、2	0、1	1、1	甲為先取，可讓剩餘石頭數為[1、1]，甲必勝		甲贏	
1、3	0、2					
1、4	0、3					
1、5	0、4					
2、2	1、0	1、2	0、1	1、1	乙贏	V
	2、0	0、2	0、2	0、0		
2、3	0、1	2、2	甲為先取，可讓剩餘石頭數為[2、2]，甲必勝		甲贏	
2、4	0、2					
2、5	0、3					
3、3	1、0	2、3	0、1	2、2	乙贏	V
	2、0	1、3	0、2	1、1		
	3、0	0、3	0、3	0、0		
3、4	0、1	3、3	甲為先取，可讓剩餘石頭數為[3、3]，甲必勝		甲贏	
3、5	0、2					
4、4	1、0	3、4	0、1	3、3	乙贏	V
	2、0	2、4	0、2	2、2		
	3、0	1、4	0、3	1、1		
	4、0	0、4	0、4	0、0		

4、5	0、1	4、4	甲為先取，可讓剩餘石頭數為[4、4]，甲必勝	甲贏	
-----	-----	-----	------------------------	----	--

3堆石頭	甲	剩餘石頭數量	乙	剩餘石頭數量	勝負	取後剩餘必勝的石頭數組合
1、1、1	0、0、1	1、1	甲為先取，可讓剩餘石頭數為[1、1]，甲必勝		甲贏	
1、1、2	0、0、2					
1、1、3	0、0、3					
1、1、4	0、0、4					
1、1、5	0、0、5					
1、2、2	1、0、0	2、2	甲為先取，可讓剩餘石頭數為[2、2]，甲必勝		甲贏	
1、2、3	1、0、0	0、2、3	0、0、1	2、2	乙贏	V
	0、1、0	1、1、3	0、0、3	1、1		
	0、2、0	1、0、3	0、0、2	1、1		
	0、0、1	1、2、2	1、0、0	2、2		
	0、0、2	1、2、1	0、2、0	1、1		
	0、0、3	1、2、0	0、1、0	1、1		
1、2、4	0、0、1	1、2、3	甲為先取，可讓剩餘石頭數為[1、2、3]，甲必勝		甲贏	
1、2、5	0、0、2					
1、3、3	1、0、0	3、3	甲為先取，可讓剩餘石頭數為[3、3]，甲必勝		甲贏	
1、3、4	0、0、2	1、2、3	甲為先取，可讓剩餘石頭數為[1、2、3]，甲必勝		甲贏	
1、3、5	0、0、3	1、2、3				
1、4、4	1、0、0	4、4	甲為先取，可讓剩餘石頭數為[4、4]，甲必勝		甲贏	
1、4、5	1、0、0	0、4、5	0、0、1	4、4	乙贏	V
	0、1、0	1、3、5	0、0、3	1、2、3		
	0、2、0	1、2、5	0、0、2	1、2、3		

	0、3、0	1、1、5	0、0、5	1、1		
	0、4、0	1、0、5	0、0、4	1、1		
	0、0、1	1、4、4	1、0、0	4、4		
	0、0、2	1、4、3	0、2、0	1、2、3		
	0、0、3	1、4、2	0、1、0	1、2、3		
	0、0、4	1、4、1	0、4、0	1、1		
	0、0、5	1、4、0	0、3、0	1、1		
2、2、2	0、0、2	2、2	甲為先取，可讓剩餘石頭數為[2、2]，甲必勝	甲贏		
2、2、3	0、0、3	2、2				
2、2、4	0、0、4	2、2				
2、2、5	0、0、5	2、2				
2、3、3	2、0、0	3、3	甲為先取，可讓剩餘石頭數為[3、3]，甲必勝	甲贏		
2、3、4	0、0、3	1、2、3	甲為先取，可讓剩餘石頭數為[1、2、3]，甲必勝	甲贏		
2、3、5	0、0、4	1、2、3				
3、3、3	0、0、3	3、3	甲為先取，可讓剩餘石頭數為[3、3]，甲必勝	甲贏		
3、3、4	0、0、4	3、3				
3、3、5	0、0、5	3、3				
3、4、4	3、0、0	4、4	甲為先取，可讓剩餘石頭數為[4、4]，甲必勝	甲贏		
3、4、5	2、0、0	1、4、5	甲為先取，可讓剩餘石頭數為[1、4、5]，甲必勝	甲贏		

三. 說明

- 根據上表的分析，可以歸納出取石頭時只要讓剩餘的石頭是下表的數量組合時就可以贏得遊戲，可以稱為必勝組合，也可以說遊戲處於平衡狀態。

2 堆石頭	[1、1]	[2、2]	[3、3]	[4、4]
3 堆石頭	[1、2、3]	[1、4、5]		

2. 由上述的必勝組合可以推論每次取石頭時只要讓遊戲維持「平衡」狀態即可獲勝，所謂的「平衡」狀態就是組合中有成對的 1 個、2 個或 4 個石頭，最簡化的例子就是 [1、1]、[2、2]、[4、4]。
3. 一堆石頭中如果有 3 個石頭，可以視為 2 個和 1 個的組合；如有 5 個石頭，可以視為 4 個和 1 個的組合。例如[3、3]和[1、2、3]可以視為有 2 組成對的石頭[1、1]和 [2、2]；[1、4、5]也可以視為有[1、1]和 [4、4] 2 組成對的石頭，所以[3、3]、[1、2、3]和[1、4、5]也是在平衡狀態。

四. 範例

3 堆石頭數量				[3、4、5]				張三 VS. 李四				勝負
張三				李四								張三勝
取	[2、0、0]	剩下	[1、4、5]	取	[0、1、0]	剩下	[1、3、5]					
取	[0、0、3]	剩下	[1、3、2]	取	[0、3、0]	剩下	[1、0、2]					
取	[0、0、1]	剩下	[1、0、1]	取	[1、0、0]	剩下	[0、0、1]					
取	[0、0、1]	剩下	[0、0、0]	取		剩下						