高愛迪斯 第三十三期【高年級數學題目】1020313

擲骰子

六 年級：11 班　　姓名：陳若婕

高愛迪斯評語：討論完整仔細，各種狀況敘述十分清楚詳盡，是一份非常精緻優良的報告！

高愛迪斯平常最喜歡玩骰子了，可是，有一天，他遇到了一個難題。問題是這樣的：「有一堆花片(數目在 50-100 顆之間)，首先任意擲一個骰子，看出現了幾點，就從花片中取去幾片花片。然後兩人輪流翻轉骰子到前次骰子出現那一面(例如 6 點)的旁邊四面中的任一面(2、3、4、5 點)，但不可以翻到對面(1 點)，也不可以不翻，翻到幾點，就取去幾個石頭，如此輪流玩，一直到拿光所有石頭，或對方沒有辦法拿石頭，則他就算贏了。」

例題:

把擲骰子的遊戲過程紀錄下來

花片總數	先手點數	後手點數	剩下點數	勝者
20	6	4	10	
	5	3(沒有 5 可翻)	2	
	2			先手勝

【問題一】

把擲骰子的遊戲過程紀錄下來(1★)

花片總數	先手點數	後手點數	剩下點數	勝負
50	6	5(不可 1 6)	39	
	6(不可 2 5)	4(不可 1 6)	29	
	6(不可 3 4)	4(不可 1 6)	19	
	5(不可 3 4)	6(不可 2 5)	8	
	4(不可 1 6)	2(不可 3 4)	2	
	1			先手勝

我的發現:(1★)

1. 骰子 1 的對面是 6，2 的對面是 5，3 的對面是 4。假設如果骰子出現 i 後輪到你，則不能翻到 i 和 7-i。(下頁續)

2. 除了第一次由先手任意擲骰子後，接下來的取數都受到前一手取數的限制，如前一手取 3，則接下來只能取 1,2,5,6。

【問題二】

把擲骰子的遊戲過程紀錄下來(1★)

花片總數	先手點數	後手點數	剩下點數	勝者
80	3	5(不可 3 4)	72	
	6(不可 2 5)	2(不可 1 6)	64	
	4(不可 2 5)	5(不可 3 4)	55	
	1(不可 2 5)	5(不可 1 6)	49	
	6(不可 2 5)	3(不可 1 6)	40	
	5(不可 3 4)	3(不可 2 5)	32	
	2(不可 3 4)	6(不可 2 5)	24	
	2(不可 1 6)	6(不可 2 5)	16	
	5(不可 1 6)	3(不可 2 5)	8	
	1(不可 3 4)	5(不可 1 6)	2	
	1(不可 2)		1	先手勝

我的發現:(1★)

1. 花片總數太多，只得隨意取數，一直到剩下的花片總數小於 20 時，才較好思考，研究後發現，如上例接近最後時餘 8，然後先手取 1(餘 7)，後手取 5(餘 2)，先手再取 1(餘 1)，造成先手勝。經分析，只要後手取 3(餘 8)時，後手只要有動腦有策略，其實後手是必贏的。 (詳見簡報內容 N=8，此時因先手不可取 4，所以後手必贏，本例中先手取 1(餘 7)，後手應該取 2(餘 5)，此時，先手只能取 1,3,4，

後手分別對應取 4,2,1，後手必贏。在上例中後手不動腦，所以反而輸了。

【問題三】

把擲骰子的遊戲過程紀錄下來(1★)

花片總數	先手點數	後手點數	剩下點數	勝者
100	3	6	91	
	2	4	85	
	5	6	74	
	5	1	68	
	3	5	60	
	6	2	52	
	1	5	46	
	6	5	35	
	1	2	32	
	4	6	22	
	5	6	11	
	4	6	1	後手勝

我的發現:(1★)

先不用先手後手稱呼對戰兩人，改稱 A 及 B，A 可能是先手，也可能是後手，當 A 取 X 片花片而讓花片數餘 Y 時，特定的 XY 組合，一定可以讓 A 獲勝。

花片數太多時實在不好分析，讓我們分析花片數餘 1 到 10 時的狀況。如上所述，當 A 取 3 餘 8 時，A 必勝；同理當 A 取 4 餘 8 時，A 必勝。反之，當 A 取 1 or 2 or 5 or 6 餘 8 時，則 B 有必勝策略，因為只要 B 取 4(餘 4)，則 A 必輸，B 必贏。

所以針對前述(X Y)，(3 8)及(4 8)時，A 有必勝策略，(1 8)(2 8)(5 8)(6 8)時，B 有必勝策略。

現在推 (1 1)(2 1)(3 1)(4 1)(5 1)(6 1)

(1 1)代表 A 取 1 後餘 1，A 必勝(因為 B 不能再取 1)

(2 1)代表 A 取 2 後餘 1，B 必勝(因為 B 取 1 就贏)

(3 1)代表 A 取 3 後餘 1，B 必勝(因為 B 取 1 就贏)

同理推(4 1) (5 1) B 必勝，(6 1)時 A 必勝。

持續推論下去，發現(X Y)在餘數 Y<9 的情況下，不同的取數 X 會導致有時 A 必勝，有時 B 必勝。(必勝代表有必勝策略)

如此一直推到(X,9)，發現當餘數 Y=9 的情況下，A 針對不同的取數 X (X=1 to 6 中任一數)，A 皆必勝，亦即只要 A 讓餘數是 9 時，A 一定有必勝策略。

【問題四】

你發現規則了嗎? 請找出小於 100 片花片的所有必勝方法(2★)

【請參閱後附簡報】。

請找出小於 200 片花片的所有必勝方法(2★)

【同樣請參閱後附簡報】。

【擲骰子】題目說明

- 本題因強調「首先任意擲一個骰子」，我們如例題所示範，先將此「任意擲骰子」者視為先手，來探討後手有必勝策略的N值。
- 規則重述：
  - 前手取數不可等於後手取數
  - (前手取數+後手取數)不可等於7
  - 一直到拿光所有花片，或對方沒有辦法拿花片，就算贏了

讓我們來推敲後手有必勝策略的N值及如何必勝

參考資料-1(拈及其各種變形遊戲)

台大數學系張鎮華教授
http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_03_2_02/page5.html

另一個和骰子有關的單堆遊戲由古先生[1]提出來，問題是這樣的：「有一堆石頭，數目不拘。首先任意擲一骰子，看出現幾點，就取去幾個石頭。然後兩人輪流翻轉骰子到前次骰子出現那一面的旁邊四面中任一面，但不可以翻到對面，也不可以不翻，翻到幾點，就取去幾個石頭，如此輪流玩到一方沒有辦法拿石頭，也就是說，剩下的石頭數比他翻到的數目還小的時候，則他就算輸了。」

首先要瞭解的一點是，骰子上面六個數目安排的方法。從1到6的各個自然數在骰子上各出現一次，1的對面是6，2的對面是5，3的對面是4。

這個遊戲和第一個單堆遊戲有點類似，卻不相同。如果骰子出現i的時候，輪到你，則從1到6中的各數有兩個，即是i和$7-i$，你不能翻到，其餘四個隨你高興愛翻那一個都可以。所以每次你能夠取的石頭數，依前次對方所翻到的數目而定，而對方翻的數又因你前次翻的而定，如此相互影響，就顯得很複雜了。仔細分析的結果，可以發現其安全殘局和8的倍數有密切關係。有興趣的讀者可以自已試試看。

驗證後發現應該是9的倍數

參考資料-2

中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書（一個對局遊戲的研究與推廣）
http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/46/junior/0304/030403.pdf

• ***遊戲三***：設前一手拿取的數為 X_k,下一手拿取的數為 X_{k+1} 且取數範圍為 1~n 時,即 $1 \le X_k, X_{k+1} \le n$ (X_k, X_{k+1}, n 為正整數)。若 $X_k \ne X_{k+1}$ 且 $X_k + X_{k+1} \ne n+1$ 時,探討後手有必勝策略的 N 值。

本次題目與此作品中遊戲三類似，即為n=6，亦即取數範圍為1~6，來探討可能的必勝策略

假設花片數為N，N=1 to 7

- N=1,2,3,4,5,6，很明顯，先手會贏
（應該說是後手不一定會贏）

- N=7，只要先手拿5，則後手「動彈不得」,所以先手會贏(後手不一定會贏)

假設花片數為N，N=8

- 當先手拿2, 3, 5, 6 時，則後手可分別拿6, 5, 3, 2 造成後手贏。
- 當先手拿1（餘7）時，則後手可拿2（不可1, 6，餘5），此時，先手只能拿1, 3, 4（不可2, 5），條列可能如下：
  - 若先手拿1，後手拿4，造成後手贏。
  - 若先手拿3，後手拿2，造成後手贏。
  - 若先手拿4，後手拿1，造成後手贏。
- 當先手拿4（餘4）時，則後手可拿1, 2（不可3, 4）
  - 後手拿1（餘3），造成先手贏。
  - 後手拿2（餘2），造成先手贏。

★所以N=8時，後手不一定會贏
(因為只要先手拿4，後手就會輸)

假設花片數為N，N=9

- 當先手拿3, 4, 5, 6 時，則後手可分別拿6, 5, 4, 3，造成後手贏。
- 當先手拿1（餘8）時，則後手可拿4（不可1, 6，餘4），此時，先手只能拿1, 2（不可3, 4），後手分別拿3, 1，造成後手贏。
- 當先手拿2（餘7）時，則後手可拿3（不可1, 6，餘4），此時，先手只能拿1, 2（不可3, 4），後手分別拿3, 1 造成後手贏。

★所以N=9時，後手有必勝策略(因為針對先手所有可能1-6，後手皆贏)

假設花片數為N，N=10 to 17

★N=10…17，分析後發現後手皆不一定會贏

假設花片數為N，N=18(下頁續)

- 當先手拿3,4,5,6 時，則後手可分別拿6,5,4,3，使總數剩下9，造成後手贏。
- 當先手拿1（餘17）時，則後手可拿4（不可1,6，餘13），此時，先手只能拿1,2,5,6（不可3,4），條列可能如下：
  - 先手取1(餘12)，則後手取4(餘8)，此時，先手只能拿1,2,5,6
    - 若先手拿1(餘7)，則後手拿4(餘3)，此時先手只能取1,2，後手可相對取2,1，造成後手贏。
    - 若先手拿2(餘6)，則後手拿3(餘3)，此時先手只能取1,2，後手可相對取2,1，造成後手贏。
    - 若先手拿5(餘3)，則後手拿3(餘0)，造成後手贏。
    - 若先手拿6(餘2)，則後手拿2(餘0)，造成後手贏。
  - 先手取2(餘11)，則後手取3(餘9)，造成後手贏。
  - 先手取5(餘8)，則後手取4(餘4)，造成後手贏。
  - 先手取6(餘7)，則後手取3(餘4)，造成後手贏。

假設花片數為N，N=18(續上頁)

- 當先手拿2（餘16）時，則後手可拿3（不可2,5，餘13），此時，先手只能拿1,2,5,6（不可3,4），條列可能如下：
  - 先手取1(餘12)，則後手取4(餘9)，造成後手贏。
  - 先手取2(餘11)，則後手取3(餘8)，此時,先手只能拿1.2.5.6
    - 若先手拿1(餘7)，則後手拿4(餘3)，此時先手只能取1,2，後手可相對取2,1，造成後手贏。
    - 若先手拿2(餘6)，則後手拿3(餘3)，此時先手只能取1.2，後手可相對取2,1，造成後手贏。
    - 若先手拿5(餘3)，則後手拿3(餘0)，造成後手贏。
    - 若先手拿6(餘2)，則後手拿2(餘0)，造成後手贏。
  - 先手取5(餘8)，則後手取4(餘4)，造成後手贏。
  - 先手取6(餘7)，則後手取3(餘4)，造成後手贏。

★所以N=18時，後手有必勝策略(因為針對先手所有可能出招，後手皆贏)

猜想：假設前一手拿取的數為a，下一手拿取的數為b，若a<>b且(a+b)<> 7時，則Np=9p,其中p 為正整數

- 我們利用數學歸納法來證明此猜想
- 當p＝1 時,原式成立,即N_1= 9
- 設p＝k 時,原式成立,即N_k= 9k
- 當p＝k+1 時,
  - 即在N_{k+1}＝7(k+1)中，因
  - 當先手拿3,4,5,6 時,則後手可分別拿6,5,4,3，湊成9(即N_1),則剩下的數為N_k,造成後手贏。
  - 當先手拿1時，則後手拿4之後
    - j.若先手拿1,2，則後手可分別拿3,2湊成9(即N_1),使剩下的數為N_k，造成後手贏。
    - k.若先手拿5,6，則後手可分別拿4,3，使總數剩下4+ N_{k-1}，後因先手不可拿3或4,因此不管先手接下來拿多少，又回到(2)j k的情形。
    - j的拿法：後手使總數剩下N_{k-1}；
    - k的拿法：後手使總數剩下4+ N_{k-2}、、4+ N_{k-3}、… … … … . 、4+ N_1、4，然而接下來先手又不能拿4，因此都造成後手贏。

續前頁證明

- 當先手拿2時，則後手拿3之後
  - m.若先手拿1,2，則後手可分別拿3,2湊成9(即N_1),使剩下的數為N_k，造成後手贏。
  - n.若先手拿5,6，則後手可分別拿4,3，使總數剩下4+ N_{k-1}，後因先手不可拿3或4,因此不管先手接下來拿多少，又回到(2)m n的情形。
  - m的拿法：後手使總數剩下N_{k-1}；
  - n的拿法：後手使總數剩下4+ N_{k-2}、、4+ N_{k-3}、… … … … ． 、4+ N_1、4，然而接下來先手又不能拿4，因此都造成後手贏。

★由數學歸納法得知：對於所有的正整數p 原式均成立。經證明後發現此猜想無誤

證明後得出之結論：
假設後手有必勝策略的花片數為正整數N

★結論一：後手有必勝策略的正整數N 會形成9,18,27,36,45,54,......的等差數列,我們記做<9；9>

★結論二：在此遊戲規則下，花片數若是9的倍數，後手均有必勝策略

在後手有必勝策略的正整數N 值之下，尋找後手之必勝策略

- 雖然已找出後手有必勝策略的N 值，但若無一套致勝的策略，恐怕也難於獲勝。因此，我們需找出後手致勝的策略。
- 既然後手致有必勝策略之N 值的一般式為Np= 9p，其中p 為正整數。即

  Np=4+9+9+............+9+9+5

  因此，我們透過倒推分析法，即從最後一數開始考慮：只要使N 的總數維持在9p或4+9p，p 為正整數，也就是說只要後手取走的數與前一手取走的數之總和維持為9p或9p+5，則後手必有致勝策略。

【問題四】你發現規則了嗎？ 請找出小於100片花片的所有必勝方法(2★)

- 如前結論，只要花片數為9, 18, 27, 36, 45, 54, ...99，則在此花片數情況下，後手已具備有必勝策略的花片數。
- 在花片數為9, 18, 27, 36, 45, 54, ...99情況下，只要後手在遊戲過程中，使剩下花片數維持在(9的倍數)或(9的倍數+4) ，也就是說只要後手取走的數與前一手之先手取走的數之全部總和維持為(9的倍數)或(9的倍數+5)，則後手必勝。

請找出小於200片花片的所有必勝方法(2★)

- 如前結論，只要花片數為9,18,27,36,45,54,......198，則在此花片數情況下，後手已具備有必勝策略的花片數。
- 在花片數為9,18,27,36,45,54,......198情況下，只要後手在遊戲過程中，使剩下花片數維持在(9的倍數)或(9的倍數+4) ，也就是說只要後手取走的數與前一手之先手取走的數之全部總和維持為(9的倍數)或(9的倍數+5)，則後手必勝。

結論延伸

★前面所述，皆為推導後手有必勝策略的正整數N，其實在遊戲過程中，不論先手或後手，現假設此人為A先生，在已具備有必勝策略的花片數(9的倍數)情況下，只要在A先生在遊戲過程中取走的數與對手取走的數之全部總和維持為(9的倍數)或(9的倍數+5)，亦即使剩下花片數維持在(9的倍數)或(9的倍數+4)，則A先生必勝。
★此A先生有可能是後手，也有可能是先手。