高愛迪斯 第二十九期【高年級數學題目】

高愛撲克排

100+

五 年級：11 班　姓名：陳若嬅

最近高愛迪斯在玩撲克牌的時候，無意間發現了一種特殊的堆牌方式，我們把這種堆牌方式稱為高愛迪斯堆牌法，方法如下：

1、首先把黑桃 1-3 和紅心 1-3(紙牌數共為 6 張)疊成一堆，順序要正確(牌面向上)。
2、把黑桃 1-3 放右手邊，再把紅心 1-3 放在左手邊。
3、從右手邊開始取出一張放在兩堆排的中間，再從左手邊取出一張牌，疊在第一張牌的上面，如此反覆，一直到所有的排堆完。
4、把中間的整堆牌平均分成兩堆，上面的 3 張牌放在右邊，下面的 3 張牌放在左邊，順序不可弄亂，再用步驟 3 的方法重新堆一次，一直到整堆牌出現剛開始時的黑桃 1-3 和紅心 1-3(順序為黑桃 1、黑桃 2、黑桃 3、紅心 1、紅心 2、紅心 3)為止。
5、記錄堆牌的次數。
6、如果牌的總數為奇數時，則右手邊多放一張牌。例如：5 張時，則右手邊 3 張，左手邊 2 張。

2

【問題一】請完成下表並記錄結果。(2★)

紙牌數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
堆牌次數	/	2	3	2	4	4	6	6	9	6
紙牌數	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
堆牌次數	5	10	12	12	12	4	8	8	9	18

【問題二】如果現在有 100 張撲克牌，請問共需要堆牌幾次？(3★) 3

針對 100 張撲克牌，要回復原來的順序，所需最少的堆牌次數為滿足下列同餘方程式的最小正整數 k

$2^k \equiv 1 \pmod{99}$

亦即 2^k 除以 99，餘數要為 1 的最小 k，經計算 k=30

A: 30次

【問題三】如果現在有 N 張撲克牌，請問共需要堆牌幾次？(5★)

(請寫出你的想法、發現、計算方法和公式。)

＊答案見後面的報告分析＊

截止日期：100 年 12 月 13 日(星期二) 下午 4：00

【問題三】如果現在有**N**張撲克牌，請問共需要堆牌幾次？（**5★**）

(請寫出你的想法、發現、計算方法和公式。**)**

ANSWER-解答如下**……**

完美洗牌(perfect shuffle)之out-shuffle

- 這次高愛撲克牌的題目屬於所謂之完美洗牌(**perfect shuffle)**
- 完美洗牌分爲**in-shuffle**及 **out-shuffle**
- 本次題目屬**out-shuffle**
- 我們以**8**張牌做例子
  – 原順序是 **1 2 3 4 5 6 7 8**
  – **out-shuffle 1**次結果是 **1 5 2 6 3 7 4 8(1**在最下 **8**在最上**)**
  – **in-shuffle   1**次結果是 **5 1 6 2 7 3 8 4(5**在最下 **4**在最上**)**
  – 這個 **in** 和 **out** 怎麼來的？看第一張和最後一張
  – 它們原本在牌堆的最外面
  – 如果洗完後跑到第二張**(**裡面**)**去就叫 **in-shuffle**
  – 如果洗完後還在外面就叫 **out-shuffle**

P.Glaister定理

- [定理](P.Glaister)
- 若將n 張牌等分為m堆(其中n>m>1)「out-shuffle」，則要回復到原來的次序所需的「out-shuffle」最少次數是滿足下列同餘方程式的最小正整數k
- m的k次方≡1(mod n-1)

P.Glaister定理(當分成2堆時)

- 若將n 張牌等分爲2 堆(其中n>1)「out-shuffle」，則要回復到原來的次序所需的「out-shuffle」最少次數是滿足下列同餘方程式的最小正整數k
- 2的k次方≡1(mod n-1)

不過，經測試上述定理僅適用於n爲偶數

以n=12爲例

- 以n=12爲例則要回復到原來的次序所需的「out-shuffle」最少次數是滿足下列同餘方程式的最小正整數k
- (2的k次方)除以(12-1) 餘數要爲1的最小k爲10
- 驗算: 2的10次方=1024，除以11之餘數爲1
- 1024除以11=93餘數爲1

n爲偶數時(從4開始)

- **If n=4 ，(2的k次方)除以(4-1) 餘數要爲1的最小k爲2**
- **If n=6 ，(2的k次方)除以(6-1) 餘數要爲1的最小k爲4**
- **If n=8 ，(2的k次方)除以(8-1) 餘數要爲1的最小k爲6**
- **If n=10 ，(2的k次方)除以(10-1) 餘數要爲1的最小k爲6**
- **If n=12 ，(2的k次方)除以(12-1) 餘數要爲1的最小k爲10**
- **If n=14 ，(2的k次方)除以(14-1) 餘數要爲1的最小k爲12**
- **If n=16 ，(2的k次方)除以(16-1) 餘數要爲1的最小k爲4**
- **If n=18 ，(2的k次方)除以(18-1) 餘數要爲1的最小k爲8**
- **If n=20 ，(2的k次方)除以(20-1) 餘數要爲1的最小k爲18**
- **…**
- **If n=100 ，(2的k次方)除以(100-1) 餘數要爲1的最小k爲30**

上述**n=4**至**20**推論結果同實際用牌測試結果

n爲奇數時(以5,7,9爲例)

- 已知 n=5時　，需堆牌4次，若以前頁公式計算:(2的4次方)除以(5-1) 餘數並不等於1
- 已知 n=7時　，需堆牌6次，若以前頁公式計算:(2的6次方)除以(7-1) 餘數亦不等於1
- 已知 n=9時　，需堆牌9次，若以前頁公式計算:(2的9次方)除以(9-1) 餘數亦不等於1
- 觀察得知:
  - 若n爲奇數時，(2的奇數次方)除以(奇數-1)的餘數是絕對不等於1的(因偶數除以偶數的餘數不會是奇數，當然不會是1)

$\boxed{\text{故前述公式並不適用n爲奇數時}}$

針對n爲偶數時之另一論術
(Conway and Guy 1996)

- 若n爲偶數且(n-1)爲質數，則堆牌(n-2)次可回到原順序(Conway and Guy 1996)
- 驗證:
  - If n=6 ， (6-1=5)爲質數，堆牌(6-2)次可回到原順序(與實際相同)
  - If n=8 ， (8-1=7)爲質數，堆牌(8-2)次可回到原順序(與實際相同)
  - If n=12 ， (12-1=11)爲質數，堆牌(12-2)次可回到原順序(亦與實際相同)
  - If n=14 ， (14-1=13)爲質數，堆牌(14-2)次可回到原順序(亦與實際相同)
  - If n=18 ， (18-1=17)爲質數，堆牌(18-2)次可回到原順序(此與實際有點出入) ，因已知n=18時，僅需8次就可回到原順序，但依上論術，則得知16次可回到原順序，16爲8的2倍，故其實不管是8次或是16次，都是可以回到原順序，故上論術依然正確

爲了n爲奇數時的解答，搜尋網路得到如下資料

待驗證如後

To restore the original order,

when the number of objects is *odd*,
the number of *shuffles* of the same kind required is:
the power to which you must raise the number 2 to make a number that has a remainder of 1 when divided by the **number of objects**.

when the number of objects is *even*,
the number of *out-shuffles* required is:
the power to which you must raise the number 2 to make a number that has a remainder of 1 when divided by ***one less than* the number of objects**;
the number of *in-shuffles* required is:
the power to which you must raise the number 2 to make a number that has a remainder of 1 when divided by ***one more than* the number of objects**.

此部份已驗證如前

前頁待驗證部份(n爲奇數)之驗證結果

- 前頁待驗證部份中文意義如下:
- 若將n 張牌(n爲奇數)分爲2 堆(其中n>1，右方堆比左方堆多1張)之「out-shuffle」，則要回復到原來的次序所需的「out-shuffle」最少次數是滿足下列同餘方程式的最小正整數k

  2的k次方≡1(mod n)
- 亦即，當n爲奇數時，所需堆牌數與(n+1)張牌時相同
- 下頁續

續前驗證

- **If n=5** ，同**n=6** ，依前推論需**4**次**(**與實際相同**)**
- **If n=7** ，同**n=8** ，依前推論需**6**次**(**與實際相同**)**
- **If n=9** ，同**n=10**，依前推論需**6**次**(**與實際**9**次不同**)**
- **If n=11**，同**n=12** ，依前推論需**10**次**(**與實際**5**次不同**)**
- **If n=13**，同**n=14** ，依前推論需**12**次**(**與實際相同**)**
- **If n=15**，同**n=16** ，依前推論需**4**次**(**與實際**12**次不同**)**
- **If n=17**，同**n=18** ，依前推論需**8**次**(**與實際相同**)**
- **If n=19**，同**n=20** ，依前推論需**18**次**(**與實際**9**次不同**)**
- **…**
- 故前推論約僅一半之正確性
- **n**爲奇數時之公式尚無法明確取得

2 對 2n+1 的 multiplicative order

- 網路上亦有提及**Multiplicative order** ，可從此數列中找出需堆牌次數
- **Multiplicative order of 2 mod 2n+1.**
- **(Formerly M0936 N0350)**
- **1, 2, 4, 3, 6, 10, 12, 4, 8, 18, 6, 11, 20, 18, 28, 5, 10, 12, 36, 12, 20, 14, 12, 23, 21, 8, 52, 20, 18, 58, 60, 6, 12, 66, 22, 35, 9, 20, 30, 39, 54, 82, 8, 28, 11, 12, 10, 36, 48, 30, 100, 51, 12, 106, 36, 36, 28, 44, 12, 24, 110, 20, 100, 7, 14, 130, 18, 36, 68, 138, 46, 60, 28**
- 網路上說**:2n** 張牌的答案**out-shuffle**所需堆牌次數即是數列第 **n** 項
- 現驗證如下頁

續前multiplicative order

- 假設已知如下數列:1, 2, 4, 3, 6, 10, 12, 4, 8, 18, 6, 11, 20, 18, 28, 5, 10, 12, 36, 12, 20, 14, 12, 23, 21, 8, 52, 20, 18, 58, 60, 6, 12, 66, 22, 35, 9, 20, 30, 39, 54, 82, 8, 28, 11, 12, 10, 36, 48, 30, 100, 51, 12, 106, 36, 36, 28, 44, 12, 24, 110, 20, 100, 7, 14, 130, 18, 36, 68, 138, 46, 60, 28
- 網路上說:2n 張牌的答案out-shuffle所需堆牌次數即是數列第 n 項
- If 2n=6(6張牌) ，找第3項=4(與實際合)
- If 2n=8(8張牌) ，找第4項=3(與實際6次不合)
- If 2n=10(10張牌) ，找第5項=6(與實際合)
- If 2n=12(12張牌) ，找第6項=10(與實際合)
- If 2n=14(14張牌) ，找第7項=12(與實際合)
- If 2n=16(16張牌) ，找第8項=4(與實際合)
- If 2n=18(18張牌) ，找第9項=8(與實際合)
- If 2n=20(20張牌) ，找第10項=18(與實際合)
- …
- 故網路上說:2n 張牌的答案out-shuffle所需堆牌次數即是數列第 n 項準確性極高，唯獨在8張牌時不正確

結論

- 當n爲偶數時(n>=4)，要回復到原來的次序所需的「out-shuffle」最少次數是滿足下列同餘方程式的最小正整數k

  2的k次方≡1(mod n-1)

- 當n爲奇數時，要回復到原來的次序所需的「out-shuffle」最少次數是滿足下列同餘方程式的最小正整數k

  2的k次方≡1(mod n)

  (當n爲奇數時之公式經驗證僅一半準確)