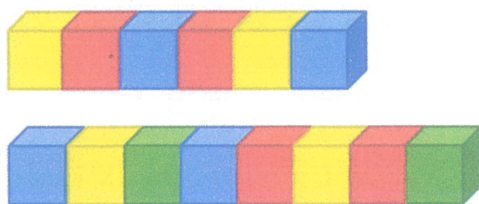


夾心數字的發明者

這次的數學高愛迪斯的內容是夾心數字，所以我想知道是誰發現了夾心數字。上網查詢後，我看到發明夾心數字的人是 C. Dudley Langford，他以前曾是一位老師，也是一位蘇格蘭的數學家。Langford 在 1958 年的數學雜誌上公布了他的報告。¹ 以後很多數學家老師，都有研究過 Langford 的數學問題，而且作者 Martin Gardner 也有幫科學人雜誌寫過一篇文章來探討這個數學題目，之後 Gardner 再把它寫進一本書裡。²

那 Langford 到底是怎麼發現夾心數字呢？原來，有一天下午他的兒子在玩積木，紅色兩塊、藍色兩塊、黃色兩塊。他兒子把紅色積木的中間隔一塊，藍色積木的中間隔兩塊，黃色積木的中間隔三塊，這時他靈光一閃，如果再加綠色兩塊可以嗎？

他試看看，如下：



後來他覺得這個數學公式很有趣，所以他就把磚塊改成數字，然後他就把 3 到 15 的夾心數字都解出來了。Langford 也有在他的報告裡發問看有沒有人有找到其他的規律。在過去的 75 年裡，很多人都有提出答案，我也很興奮可以寫這一次的高愛迪斯。

¹ Problem. (1958). *The Mathematical Gazette*, 42 (341), 228-228. <https://doi.org/10.2307/3610395>

² Gardner, M. *Mathematical Magic Show: More Puzzles, Games, Diversions, Illusions and Other Mathematical Sleight-of-Mind from Scientific American*. New York: Vintage, pp. 70 and 77-78, 1978.

題目

【問題一】請使用數字 1-4 各 2 個，共 8 個數字，排入下列方格中，並且符合 2 個 1 中間夾 1 個數字，2 個 2 中間夾 2 個數字，2 個 3 中間夾 3 個數字，2 個 4 中間夾 4 個數字(1★)

2	3	4	2	1	3	1	4
---	---	---	---	---	---	---	---

原因：因為我不知道夾心數字有什麼規律，所以我就一個一個試。因為沒有很多數字，所以不用太多時間就能找到正確的答案。

【問題二】請使用數字 1-5 各 2 個，共 10 個數字，排入下列方格中，並且符合 2 個 1 中間夾 1 個數字，2 個 2 中間夾 2 個數字，2 個 3 中間夾 3 個數字，2 個 4 中間夾 4 個數字，以此類推…… (1★)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

原因：沒有夾心數字，詳細原因請參閱第 6 頁。

【問題三】請使用數字 1-6 各 2 個，共 12 個數字，排入下列方格中，並且符合 2 個 1 中間夾 1 個數字，2 個 2 中間夾 2 個數字，2 個 3 中間夾 3 個數字，2 個 4 中間夾 4 個數字，以此類推…… (1★)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

原因：沒有夾心數字，詳細原因請參閱第 7 頁。

【問題四】請使用數字 1-7 各 2 個，共 14 個數字，排入下列方格中，並且符合 2 個 1 中間夾 1 個數字，2 個 2 中間夾 2 個數字，2 個 3 中間夾 3 個數字，2 個 4 中間夾 4 個數字(1★)

4	5	6	7	1	4	1	5	3	6	2	7	3	2
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

原因：之前我只有找到 1-4 的夾心數字(因為只有一組，所以還沒有規律)，所以做這題的時候還是只能一個一個試，還好沒有花掉太多時間。

【問題五】請使用數字 1-8 各 2 個，共 16 個數字，排入下列方格中，並且符合 2 個 1 中間夾 1 個數字，2 個 2 中間夾 2 個數字，2 個 3 中間夾 3 個數字，2 個 4 中間夾 4 個數字，以此類推…… (1★)

4	5	6	7	8	4	1	5	1	6	3	7	2	8	3	2
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

原因：我看到 1-4 和 1-7 的前幾個數字有規律(234 和 4567)，所以我就試試看(用 345678、45678、5678 來做為前面的數字)，結果發現 45678 成功了。這個規律幫我省了很多時間。

【問題六】請使用數字 1-9 各 2 個，共 18 個數字，排入下列方格中，並且符合 2 個 1 中間夾 1 個數字，2 個 2 中間夾 2 個數字，2 個 3 中間夾 3 個數字，2 個 4 中間夾 4 個數字，以此類推…… (1★)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

原因：沒有夾心數字，詳細原因請參見第 6 頁。

【問題七】請使用數字 1-10 各 2 個，共 20 個數字，排入下列方格中，並且符合 2 個 1 中間夾 1 個數字，2 個 2 中間夾 2 個數字，2 個 3 中間夾 3 個數字，2 個 4 中間夾 4 個數字，以此類推…… (1★)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

原因: : 沒有夾心數字，詳細原因請參閱第 7 頁。

【問題八】研究結果與發現(數字排列的技巧、特殊的限制、有無規律…)1★

參見第 10、11 頁

【問題九】你能排出一組數字 10 以上的夾心數字嗎?任意排出 1 組不同的數即獲得 1 顆星(最多獲得 2★)

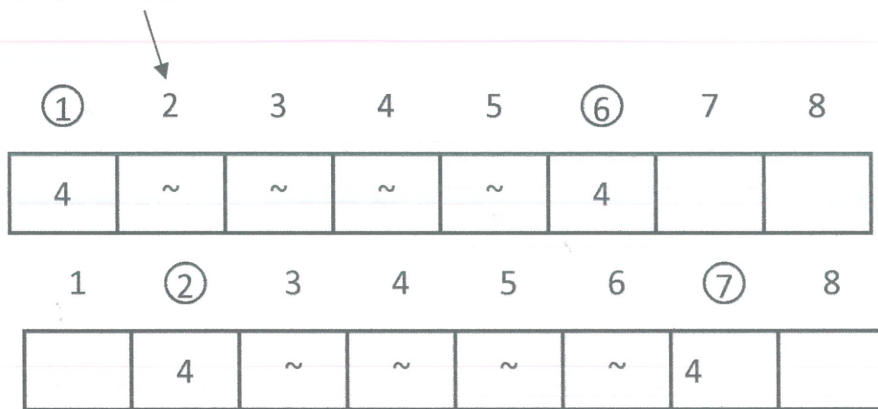
參見第 12、13 頁

是不是所有數字都可以排出夾心數字呢？

首先，我們先來看看夾心數字裡的

偶數，例如：4

格子的編號



偶數一定會用到 1 個奇數格子和一個偶數格子

看看**奇數**，例如：5



奇數一定會用到 2 個奇數格子或 2 個偶數格子

怎麼幫數字做分類

看完偶數和奇數需要用的格子，現在我們來看看哪些數字可以排成夾心數字，哪些不能。因為不能每個數字都試，所以我要找出一個幫數字分類的方法。我看到 1-3 和 1-4 有夾心數字，1-7 和 1-8 也有夾心數字，他們之間都間隔 4，所以我就試了 4 的倍數，例如：4 的倍數加 1、4 的倍數加 2、4 的倍數加 3 和 4 的倍數。

試試看 4 的倍數加 1

試試看 17 1 到 17 需要 34 個格子

17 有：

9 個奇數

17 個奇數格子

8 個偶數

17 個偶數格子

偶數：

8 個偶數需要 8 個奇數格子和 8 個偶數格子

剩下： $17 - 8 = 9$ 個奇數格子和 $17 - 8 = 9$ 個偶數格子

奇數：

4 個奇數需要 8 個奇數格子

剩下： $9 - 8 = 1$ 個奇數格子

4 個奇數需要 8 個偶數格子

剩下： $9 - 8 = 1$ 個偶數格子

不能把最後 1 個奇數放進 1 個奇數格子和 1 個偶數格子。

結果是：不可能排出夾心數字



試試看 4 的倍數加 2

試試看 18

1 到 18 需要

36 個格子

18 有：

9 個奇數

18 個奇數格子

9 個偶數

18 個偶數格子

偶數：

9 個偶數需要 9 個奇數格子和 9 個偶數格子

剩下： $18 - 9 = 9$ 個奇數格子和 $18 - 9 = 9$ 個偶數格子

奇數：

4 個奇數需要 8 個奇數格子

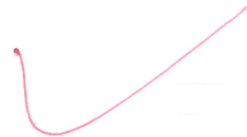
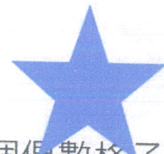
剩下： $9 - 8 = 1$ 個奇數格子

4 個奇數需要 8 個偶數格子

剩下： $9 - 8 = 1$ 個偶數格子

不能把最後 1 個奇數放進 1 個奇數格子和 1 個偶數格子。

結果是：不可能排出夾心數字



試試看 4 的倍數加 3

試試看 19

1 到 19 需要

38 個格子

19 有：

10 個奇數

19 個奇數格子

9 個偶數

19 個偶數格子

偶數：

9 個偶數需要 9 個奇數格子和 9 個偶數格子

剩下： $19 - 9 = 10$ 個奇數格子和 $19 - 9 = 10$ 個偶數格子

奇數：

5 個奇數需要 10 個奇數格子

剩下： $10 - 10 = 0$ 個奇數格子

5 個奇數需要 10 個偶數格子

剩下： $10 - 10 = 0$ 個偶數格子

結果是：有可能排出夾心數字



試試看 4 的倍數

試試看 20

1 到 20 需要

40 個格子

20 有：

10 個奇數

20 個奇數格子

10 個偶數

20 個偶數格子

偶數：

10 個偶數需要 10 個奇數格子和 10 個偶數格子

剩下： $20 - 10 = 10$ 個奇數格子和 $20 - 10 = 10$ 個偶數格子

奇數：

5 個奇數需要 10 個奇數格子

剩下： $10 - 10 = 0$ 個奇數格子

5 個奇數需要 10 個偶數格子

剩下： $10 - 10 = 0$ 個偶數格子

結果是：有可能排出夾心數字



總結

如果最大的數字是	可能找到夾心數字嗎？
4 的倍數加 1	不可能
4 的倍數加 2	不可能
4 的倍數加 3	有可能
4 的倍數	有可能

夾心數字的規律

只有 4 的倍數加 3 和 4 的倍數才有可能排出夾心數字。

針對這些數字，怎麼找到夾心數字的順序呢？

規律 1：

我發現一個簡單的規律讓夾心數字成功—如果最大的數字是奇數，最大的數字加 1 除 2 就會是順序裡的第 1 個數字。第 2 個數字是第 1 個數字加 1，第 3 個數字是第 1 個數字加 2……直到排到最大的數字。(紅色是最大的數字，紫色是順序裡的第 1 個數字。黃色格子是第一個數字到最大的數字，綠色格子就是根據黃色格子裡的數字已經知道要放在哪裡的數字)

7

4	5	6	7	?	4	?	5	?	6	?	7	?	?
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

$(7 + 1) \div 2 = 4$

如果最大的數字是偶數，最大的數字除 2 就會等於順序裡的第 1 個數字。

8

4	5	6	7	8	4	?	5	?	6	?	7	?	8	?	?
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

$8 \div 2 = 4$

規律 2 :

另外我也有發現，4 的倍數加 1 和 4 的倍數加 2 沒有夾心數字；4 的倍數加 3 和 4 的倍數有夾心數字，所以夾心數字都可以分成一組一組的，例如：3,4、7,8 和 11,12。這一對數字裡，小的數字如果先解開，那比較大的數字的最右邊的順序，就會跟比較小的數字是一樣的。剩下的數字只需要做一些小改變就可以了。(黃色格子和綠色格子是用規律 1 找出來的數字，白色格子是 15 和 16 相同的地方，綠色格子是 15 和 16 不一樣的地方。)

15	8	9	10	11	12	13	14	15	7	8	1	9	1	10	5	11	7	12	6	13	5	14	4	15	3	6	2	4	3	2		
									↓	↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓			
16	8	9	10	11	12	13	14	15	16	8	7	9	1	10	1	11	5	12	7	13	6	14	5	15	4	16	3	6	2	4	3	2

規律 3 :

另外 Langford 老師也有發現一個規律，就是 1-3 和 1-4 的順序可以被放在 1-12 和 1-15 的後面。

參見下圖：

$n = 3$: 312132
 $n = 4$: 41312432
 $n = 7$: 17126425374635
 $n = 8$: 3181375264285746
 $n = 11$: 121e257t8395637e48t694
 $n = 12$: Tt864e975468tT579e|312132
 $n = 15$: Fθe975fTt86579eθF68tTf|41312432
 $t = 10, e = 11, T = 12, θ = 13, f = 14, F = 15.$

你會注意到 Langford 為 7、8、11、12、15 找到了許多不同的答案。其實，每個夾心數字都有很多種不同的解答，隨著更大的夾心數字就會有更多的解答。

12

11	6	7	8	9	10	11	5	6	1	7	18	5	9	4	10	3	11	2	4	3	2																		
12	6	7	8	9	10	11	12	6	5	7	1	8	1	9	5	10	4	11	3	12	2	4	3	2															
15	8	9	10	11	12	13	14	15	7	8	1	9	1	10	5	11	7	12	6	13	5	14	4	3	2														
16	8	9	10	11	12	13	14	15	16	8	7	9	1	10	1	11	5	12	7	13	6	14	5	4	3	2													
19	10	11	12	13	14	15	16	17	8	19	1	10	11	5	12	13	9	4	5	15	8	16	17	18	19	4	8	3	6	2	4	3	2						
20	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	10	11	1	12	5	13	7	14	0	15	5	16	8	17	7	18	6	19	9	20	4	8	3	6	2	4	3	2

甲 乙
 even $\neq 2$
 odd (甲+1) = 2

甲	乙
11	6
12	6
15	8

13

23

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	10	3	9	6	4	2	11	8	2	6	4	10
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---	---	---	---	---	----	---	---	---	---	----

24

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	12	11	13	7	14	3	15	5	16	3	17	7	18	5	19	9	20	11	21	7	22	8	23	10	24	9	6	4	2	11	8	2	6	4	10
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	----	----	---	----	---	----	----	----	---	---	---	---	----	---	---	---	---	----

27

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	14	15	3	16	5	17	3	18	7	19	5	20	9	21	11	22	7	23	13	24	10	25	9	26	12	2	11	8	6	4	2	10	13	2	4	6	8	12
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	----	----	---	----	----	----	----	----	---	----	----	---	----	---	---	---	---	----	----	---	---	---	---	----

28

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	14	15	16	3	17	5	18	3	19	7	20	5	21	9	22	11	23	7	24	13	25	10	26	27	12	28	11	8	6	4	2	10	13	2	4	6	8	12
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	----	----	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---	---	---	---	----	----	---	---	---	---	----

↑ 甲乙

資料詳盡、解說清楚、非常棒

5/10