

第五十三期【數學題目】

112/03/02

夾心數字

五年級 四 班 姓名：張書瑋

聽說高愛迪斯最喜歡吃的零食就是夾心餅乾了，尤其是仁愛食品公司製作的夾心餅乾更是愛不釋手。在一個陽光燦爛的早上，高愛迪斯突然靈光一閃，就把手上的6塊餅乾編成1-3號各兩塊，並且把它們重新打亂再排成一排，結果居然發現2個編號1的餅乾中間夾了1塊餅乾，2個編號2的餅乾中間夾了2塊餅乾，2個編號3的餅乾中間夾了3塊餅乾(如下圖一所示)，真是太神奇了！高愛迪斯特別將它們稱為【夾心數字】。

【圖一】



可是高愛迪斯並不確定1-10所有數字都能排出夾心數字，像2個1，2個2就無法成功，所以當你無法成功時請詳細說明無法成功的原因。

【問題一】請使用數字1-4各2個，共8個數字，排入下列方格中，並且符合2個1中間夾1個數字，2個2中間夾2個數字，2個3中間夾3個數字，2個4中間夾4個數字(1★)

4	1	3	1	2	4	3	2
---	---	---	---	---	---	---	---

【問題二】請使用數字1-5各2個，共10個數字，排入下列方格中，並且符合2個1中間夾1個數字，2個2中間夾2個數字，2個3中間夾3個數字，2個4中間夾4個數字，以此類推……(1★)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

原因：無解，詳見 p. 3 證明

【問題三】請使用數字1-6各2個，共12個數字，排入下列方格中，並且符合2個1中間夾1個數字，2個2中間夾2個數字，2個3中間夾3個數字，2個4中間夾4

個數字，以此類推……(1★)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

原因：無解，詳見 p. 3 證明

【問題四】請使用**數字1-7各2個，共14個數字**，排入下列方格中，並且符合2個1中間夾1個數字，2個2中間夾2個數字，2個3中間夾3個數字，2個4中間夾4個數字(1★)

4	6	3	5	7	4	3	2	6	5	2	1	7	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

【問題五】請使用**數字1-8各2個，共16個數字**，排入下列方格中，並且符合2個1中間夾1個數字，2個2中間夾2個數字，2個3中間夾3個數字，2個4中間夾4個數字，以此類推……(1★)

4	5	8	6	3	4	7	5	3	6	2	8	2	1	7	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

【問題六】請使用**數字1-9各2個，共18個數字**，排入下列方格中，並且符合2個1中間夾1個數字，2個2中間夾2個數字，2個3中間夾3個數字，2個4中間夾4個數字，以此類推……(1★)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

原因：無解，詳見 p. 3 證明

【問題七】請使用**數字1-10各2個，共20個數字**，排入下列方格中，並且符合2個1中間夾1個數字，2個2中間夾2個數字，2個3中間夾3個數字，2個4中間夾4個數字，以此類推……(1★)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

原因：無解，詳見 p. 3 證明

【問題八】研究結果與發現(數字排列的技巧、特殊的限制、有無規律...)1★

$n=4k+1$ 或 $4k+2$ 無法排出夾心數列之證明(一):

以4的夾心數字成功的例子來看:

41312432

1 3 3 2
4 4 4 4 3 2

被夾數定義:被哪個數字夾住,以綠色數字表示,以右邊例子來看,1被兩個4夾住,所以1的下面有4

可發現上面的數列中,有4個4,3個3,2個2,1個1

所以在成功排出來的夾心數列中,一定有 n 個 n , $n-1$ 個 $n-1$,……,1個1

任意兩數 a 、 b 可能有以下幾種排列

排列方式	a被b夾的次數	b被a夾的次數	a被b夾的次數+b被a夾的次數
aabb	0	0	0
abab	1	1	2
abba	0	2	2
baab	2	0	2
baba	1	1	2
bbaa	0	0	0

每個夾心數列都由aabb的型態組成,由上表可得知,每個成功的夾心數字的綠色數字和皆為 $2m+0n$,都是偶數,所以無法排出 $n=4k+1$ 或 $4k+2$ 的夾心數列。

$n=4k+1$ 或 $4k+2$ 無法排出夾心數列之證明(二):

項數之定義:從左邊開始數,第一位之項數為1,第二位之項數為2……依此類推。
且每個數字都會出現兩次,所以一個數字會有兩個項數,如果有一個數字是a,那麼定義項數比較小的a的項數是 A_a ,則可得項數較大的a的項數為 A_a+a+1 ,如下表:

數列	()	()	……	a	……	a	……	2n
項數	1	2	……	A_a	……	A_a+a+1	……	2n

夾心數列的項數和可以寫成: $1+2+\dots+2n=n(1+2n)=2n^2+n$

所以夾心數列的項數和也可以寫成:

$$A_1 + A_1 + 1 + 1 + A_2 + A_2 + 2 + 1 + \dots + A_n + A_n + n + 1$$

可得: $2n^2+n=2(A_1 + A_2 + \dots + A_a) + \frac{n(n+1)}{2} + n$

將上述式子左右同乘2可得: $4n^2 + 2n = 4(A_1 + A_2 + \dots + A_a) + n^2 + 3n$

移項後可得: $3n^2 - n = 4(A_1 + A_2 + \dots + A_a)$

整合後可得: $n(3n - 1) = 4(A_1 + A_2 + \dots + A_a)$

所以 $n(3n - 1)$ 必為4的倍數,所以當 $n=4k+1$ 或 $4k+2$ 時不成立($k \in \mathbb{N}$)。

排出夾心數列之技巧:

【問題九】你能排出一組數字10以上的夾心數字嗎?任意排出1組不同的數即獲得1顆星(最多獲得2★)

11的夾心數字:

[6, 7, 8, 10, 5, 9, 11, 6, 4, 7, 5, 8, 3, 4, 10, 9, 3, 2, 11, 1, 2, 1]

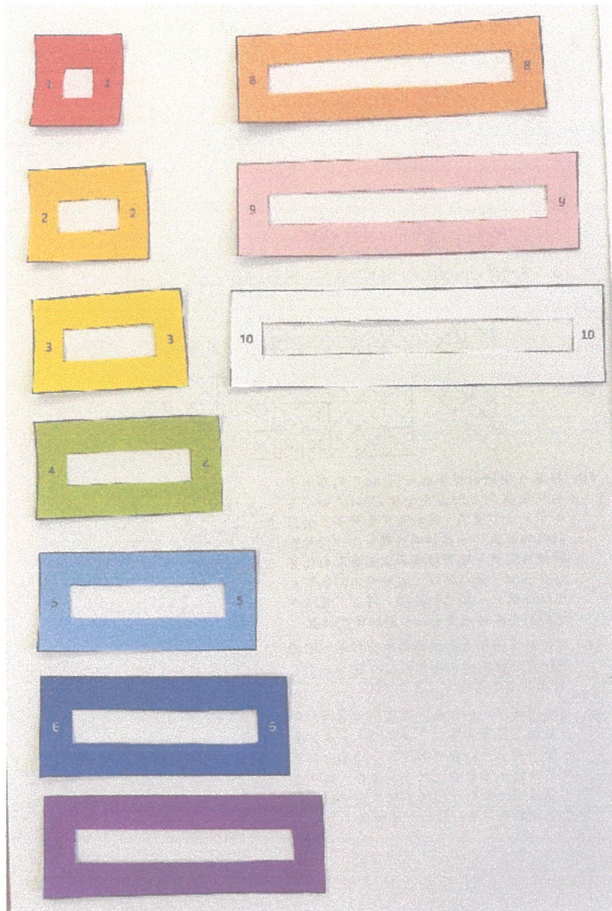
12的夾心數字:

[12, 7, 4, 8, 10, 5, 9, 4, 11, 7, 6, 5, 8, 12, 3, 10, 9, 6, 3, 2, 11, 1, 2, 1]

製作教具來解題

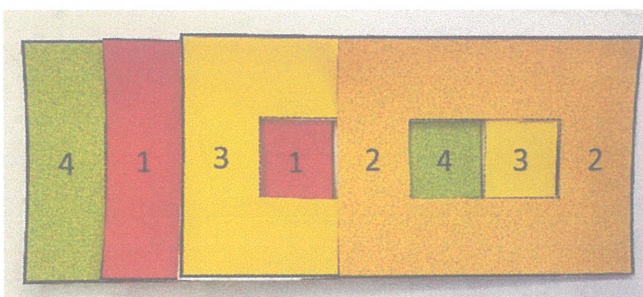
因為我發現 (1,1) 之間需要空格 1 個單位，(2,2) 之間需要空格 2 個單位，我就把這個當作限制，製作了數對的教具如下，每個數的長度單位為 1 單位長。

有了這個單位長的限制，可以方便我用排列的方式排出正確的數列。(如附件)

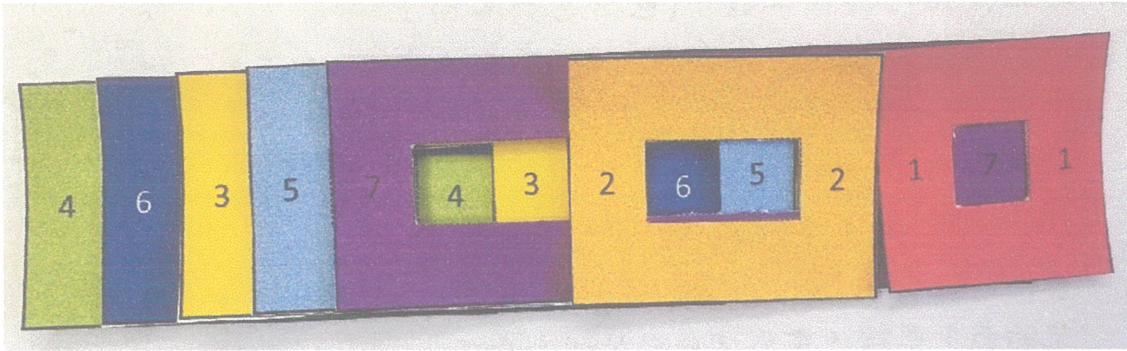


數對	長度單位
(1, □, 1)	3
(2, □, □, 2)	4
(3, □, □, □, 3)	5
(4, □, □, □, □, 4)	6
(5, □, □, □, □, □, 5)	7
(6, □, □, □, □, □, □, 6)	8
(7, □, □, □, □, □, □, □, 7)	9
(8, □, □, □, □, □, □, □, □, 8)	10
(9, □, □, □, □, □, □, □, □, □, 9)	11
(10, □, □, □, □, □, □, □, □, □, □, 10)	12

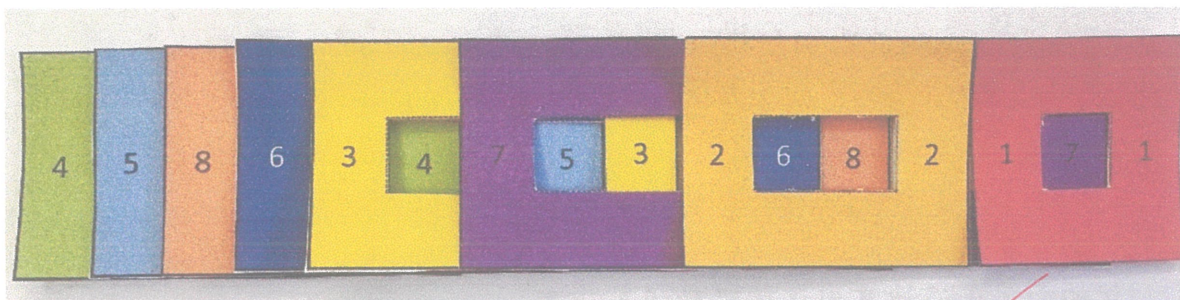
N=4 的解如下



N=7 的解如下



N=8 的解如下



用程式解

3/6 那天拿到高愛迪斯的題目，我就覺得應該是可以程式幫忙求解，

所以，我就嘗試寫了第一個程式

```
from itertools import permutations
# 生成所有可能的排列
numbers = permutations([1, 1, 2, 2, 3, 3])

# 檢查每個排列是否符合條件
for num in numbers:
    if abs(num.index(1) - num.index(1, num.index(1) + 1)) == 2 and \
        abs(num.index(2) - num.index(2, num.index(2) + 1)) == 3 and \
        abs(num.index(3) - num.index(3, num.index(3) + 1)) == 4 :
        # 如果符合條件，則輸出結果
        print(num)
```

結果，這個程式只能算出 N=3 和 N=4 兩組的解

(2, 3, 1, 2, 1, 3)

(3, 1, 2, 1, 3, 2)

(2, 3, 4, 2, 1, 3, 1, 4)

(4, 1, 3, 1, 2, 4, 3, 2)

因為我用 permutations 指令，可是應該跑到 8 個數字就需要跑很久，8 個數字相當於 16!，對電腦運算的處理來說太龐大了。

所以，我後來研究用別的方法寫程式，

如果以 N=3 舉例，

我先設定一個有 6 個空格的數列矩陣，

並且假想有四個數對，(1, □, 1)、(2, □, □, 2)、(3, □, □, □, 3)要同時填入這個數列矩陣中。

```
N = 3      //N 可填入 3, 4, 7, 8, 11, 12, ...4N 或 4N+3
seq = [0 for _ in range(2*N)]
num = [k for k in range(1000)]
it = iter(num)
def findSol(seq, k):
    if seq.count(0)==0:
        print(next(it), seq)
    for i in range(0, 2*N-k-1):
        if seq[i] == 0 and seq[i+k+1] == 0:
            kseq = seq.copy()
            kseq[i], kseq[i+k+1] = k, k
```

findSol(kseq, k+1)

findSol(seq, 1)

用程式運算得到的結果

N=3

0 [3, 1, 2, 1, 3, 2]

1 [2, 3, 1, 2, 1, 3]

N=4

0 [4, 1, 3, 1, 2, 4, 3, 2]

1 [2, 3, 4, 2, 1, 3, 1, 4]

N=7

0 [1, 7, 1, 2, 5, 6, 2, 3, 4, 7, 5, 3, 6, 4]

1 [1, 7, 1, 2, 6, 4, 2, 5, 3, 7, 4, 6, 3, 5]

2 [1, 6, 1, 7, 2, 4, 5, 2, 6, 3, 4, 7, 5, 3]

3 [1, 5, 1, 6, 7, 2, 4, 5, 2, 3, 6, 4, 7, 3]

4 [1, 4, 1, 5, 6, 7, 4, 2, 3, 5, 2, 6, 3, 7]

5 [1, 4, 1, 6, 7, 3, 4, 5, 2, 3, 6, 2, 7, 5]

6 [1, 6, 1, 3, 5, 7, 4, 3, 6, 2, 5, 4, 2, 7]

7 [1, 5, 1, 7, 3, 4, 6, 5, 3, 2, 4, 7, 2, 6]

8 [1, 5, 1, 6, 3, 7, 4, 5, 3, 2, 6, 4, 2, 7]

9 [1, 5, 1, 4, 6, 7, 3, 5, 4, 2, 3, 6, 2, 7]

10 [5, 1, 7, 1, 6, 2, 5, 4, 2, 3, 7, 6, 4, 3]

11 [4, 1, 7, 1, 6, 4, 2, 5, 3, 2, 7, 6, 3, 5]

12 [4, 1, 6, 1, 7, 4, 3, 5, 2, 6, 3, 2, 7, 5]

13 [7, 1, 3, 1, 6, 4, 3, 5, 7, 2, 4, 6, 2, 5]

14 [7, 1, 4, 1, 6, 3, 5, 4, 7, 3, 2, 6, 5, 2]

15 [6, 1, 5, 1, 7, 3, 4, 6, 5, 3, 2, 4, 7, 2]

16 [4, 6, 1, 7, 1, 4, 5, 2, 6, 3, 2, 7, 5, 3]

17 [7, 3, 1, 6, 1, 3, 4, 5, 7, 2, 6, 4, 2, 5]

18 [4, 6, 1, 7, 1, 4, 3, 5, 6, 2, 3, 7, 2, 5]

19 [5, 6, 1, 7, 1, 3, 5, 4, 6, 3, 2, 7, 4, 2]

20 [7, 4, 1, 5, 1, 6, 4, 3, 7, 5, 2, 3, 6, 2]

21 [5, 7, 1, 4, 1, 6, 5, 3, 4, 7, 2, 3, 6, 2]

22 [3, 6, 7, 1, 3, 1, 4, 5, 6, 2, 7, 4, 2, 5]

23 [5, 7, 4, 1, 6, 1, 5, 4, 3, 7, 2, 6, 3, 2]

24 [2, 6, 7, 2, 1, 5, 1, 4, 6, 3, 7, 5, 4, 3]

25 [4, 5, 6, 7, 1, 4, 1, 5, 3, 6, 2, 7, 3, 2]

26 [2, 3, 7, 2, 6, 3, 5, 1, 4, 1, 7, 6, 5, 4]

27 [3, 4, 5, 7, 3, 6, 4, 1, 5, 1, 2, 7, 6, 2]
28 [2, 3, 6, 2, 7, 3, 4, 5, 1, 6, 1, 4, 7, 5]
29 [5, 2, 4, 7, 2, 6, 5, 4, 1, 3, 1, 7, 6, 3]
30 [2, 6, 3, 2, 7, 4, 3, 5, 6, 1, 4, 1, 7, 5]
31 [2, 6, 3, 2, 5, 7, 3, 4, 6, 1, 5, 1, 4, 7]
32 [2, 4, 7, 2, 3, 6, 4, 5, 3, 1, 7, 1, 6, 5]
33 [5, 2, 7, 3, 2, 6, 5, 3, 4, 1, 7, 1, 6, 4]
34 [5, 2, 4, 6, 2, 7, 5, 4, 3, 1, 6, 1, 3, 7]
35 [3, 5, 7, 2, 3, 6, 2, 5, 4, 1, 7, 1, 6, 4]
36 [2, 7, 4, 2, 3, 5, 6, 4, 3, 7, 1, 5, 1, 6]
37 [2, 5, 6, 2, 3, 7, 4, 5, 3, 6, 1, 4, 1, 7]
38 [5, 2, 6, 4, 2, 7, 5, 3, 4, 6, 1, 3, 1, 7]
39 [5, 7, 2, 3, 6, 2, 5, 3, 4, 7, 1, 6, 1, 4]
40 [5, 3, 6, 7, 2, 3, 5, 2, 4, 6, 1, 7, 1, 4]
41 [3, 4, 6, 7, 3, 2, 4, 5, 2, 6, 1, 7, 1, 5]
42 [7, 2, 6, 3, 2, 4, 5, 3, 7, 6, 4, 1, 5, 1]
43 [7, 2, 4, 6, 2, 3, 5, 4, 7, 3, 6, 1, 5, 1]
44 [6, 2, 7, 4, 2, 3, 5, 6, 4, 3, 7, 1, 5, 1]
45 [7, 2, 4, 5, 2, 6, 3, 4, 7, 5, 3, 1, 6, 1]
46 [5, 7, 2, 6, 3, 2, 5, 4, 3, 7, 6, 1, 4, 1]
47 [7, 3, 6, 2, 5, 3, 2, 4, 7, 6, 5, 1, 4, 1]
48 [3, 7, 4, 6, 3, 2, 5, 4, 2, 7, 6, 1, 5, 1]
49 [3, 5, 7, 4, 3, 6, 2, 5, 4, 2, 7, 1, 6, 1]
50 [5, 3, 6, 4, 7, 3, 5, 2, 4, 6, 2, 1, 7, 1]
51 [4, 6, 3, 5, 7, 4, 3, 2, 6, 5, 2, 1, 7, 1]

後續不列出所有解，只列各組各有多少解

$N = 3$ 共 2 組

$N = 4$ 共 2 組

$N = 5$ 共 0 組

$N = 6$ 共 0 組

$N = 7$ 共 52 組 [4, 6, 3, 5, 7, 4, 3, 2, 6, 5, 2, 1, 7, 1]

Ex. [4, 6, 3, 5, 7, 4, 3, 2, 6, 5, 2, 1, 7, 1]

$N = 8$ 共 300 組

ex. [4, 5, 8, 6, 3, 4, 7, 5, 3, 2, 6, 8, 2, 1, 7, 1]

$N = 9$ 共 0 組

$N = 10$ 共 0 組

$N = 11$ 共 35584 組

Ex. [6, 7, 8, 10, 5, 9, 11, 6, 4, 7, 5, 8, 3, 4, 10, 9, 3, 2, 11, 1, 2, 1]

$N = 12$ 共 216288 組

[12, 7, 4, 8, 10, 5, 9, 4, 11, 7, 6, 5, 8, 12, 3, 10, 9, 6, 3, 2, 11, 1, 2, 1]

因此，用程式解，也可以得到我們之前得到的結論，只有 $n=4k$ 和 $4k+3$ 時會有解， $n=4k+1$ 或 $4k+2$ 時無解($k \in \mathbb{N}$)

參考文獻

黃皓倫、黃師軒、吳思賢、賴瑞禹。挑剔數列。第 43 屆全國中小學科展數學科國中組作品說明書。2023 年 4 月 23 日取自 <https://www.ntsec.edu.tw/Science-Content.aspx?cat=&a=0&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=567&sid=904&print=1>

陳子彙、蔡宇晴。挑剔環。第 61 屆全國中小學科展數學科國中組作品說明書。2023 年 4 月 23 日取自 <https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/61/pdf/NPHSF2021-030406.pdf?0.5259128953330219>

能利用教具及程式來解出所有解。
超級棒 5/10.

截止日期：112 年 4 月 28 日(星期五)下午 4:00