高愛迪斯 第30期
【高年級數學題目】

10☆+
解答完整足爲
GIDS：學弟妹之解題
範本

金幣達人

5年級 11班 陳若婕

101年5月

【金幣達人】題目說明

- 桌上共有12枚金幣，其中有1個金幣是偽幣，但是我們並不知道偽幣比真幣輕，還是重？現在請你使用天平把這個偽幣找出來。請你把所有的狀況完整的記錄下來。(可使用圖示配合文字)
- 【問題一】：如果不考慮運氣的話，最少需要秤幾次，才能找出偽幣(3★)？
- 【問題二】：如果現在金幣有60枚，在不考慮運氣的前提下，最少需要秤幾次，才能找出偽幣(3★)？
- 【問題三】：如果現在金幣有N枚，在不考慮運氣的前提下，最少需要秤幾次，才能找出偽幣(4★)？

【問題一】：如果不考慮運氣的話，最少需要秤幾次，才能找出偽幣？

- 解答前提：其中有1個金幣是偽幣，且我們並不知道偽幣比真幣輕，還是重？

★以Times(n)代表n枚金幣最少需秤之次數
★以w(A,B,….)代表()內金幣之總重量，亦即w(A,B,C)代表金幣A+B+C之重量

本題即是要解Times(12)=?讓我們先算Times(3)=?
解答：設3個金幣為 A,B,C
【秤A,B 】
 IF w(A)=w(B)，then C為偽幣
 IF w(A)<>w(B)， 【秤A，C 】
  IF w(A)=w(C) ，then B為偽幣
  IF w(A)<>w(C) ，then A為偽幣
所以Times(3)=2

★亦即 3 枚金幣最少需秤 2 次

再算Times(4)=?

- 解答：設4個金幣為 A,B,C,D

【秤A,B】
  IF w(A)=w(B)
  THEN【秤A,C】
      IF w(A)=w(C)
      THEN D為偽幣
      ELSE C為偽幣
  ELSE【秤A,C】
      IF w(A)=w(C)
      THEN B為偽幣
      ELSE A為偽幣

所以Times(4)=2

★亦即 4 枚金幣最少需秤 2 次

12個金幣最少需要秤幾次，才能找出偽幣?

解答：

由於解答太長，請參考下三頁 MS Word檔案說明，推導結果為【12 枚金幣最少需秤 3 次】

【問題二】：如果現在金幣有60枚，在不考慮運氣的前提下，最少需要秤幾次，才能找出偽幣？

- 比照前述Times(3)、Times(4) 及Times(12)作法，我們逐一更改金幣數目一直到60
- 我們得出Times(n)，n=3 to 60，並將結果列於下兩頁

★為何n=1及n=2未列入Times(n)

If n=1 ，則題目=桌上共有1枚金幣，其中有1個金幣是偽幣，但是我們並不知道偽幣比真幣輕，還是重？現在請你使用天平把這個偽幣找出來。

(答案當然是不用秤，或說Times(1)=0)

If n=2 ，則題目=桌上共有2枚金幣，其中有1個金幣是偽幣，但是我們並不知道偽幣比真幣輕，還是重？現在請你使用天平把這個偽幣找出來。

(答案當然是【秤了也不知道】，或說Times(2)= 【無意義】或【無法找出偽幣】)

實驗所得：金幣數與找出偽幣最少次數間之關係(n=1 to 30)

金幣數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
最少次數	0	無法找出偽幣	2	2	3	3	3	3	3	3

金幣數	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
最少次數	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4

金幣數	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
最少次數	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

實驗所得：金幣數與找出偽幣最少次數間之關係(n=31 to 60)

金幣數	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
最少次數	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

金幣數	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
最少次數	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5

金幣數	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
最少次數	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5

★所以 60 枚金幣最少需秤 5 次才能找出偽幣

【問題三】：如果現在金幣有N枚，在不考慮運氣的前提下，最少需要秤幾次，才能找出偽幣？

讓我們歸納實驗所得金幣數與找出偽幣最少次數資料

n為金幣數目

當n=1及n=2時，已如前述屬【特例】，排除於歸納

當$2<n<=4$ 時

- 最少次數為2次，另發現：$4=3^0+3^1$

當$4<n<=13$ 時

- 最少次數為3次，另發現：$13=1+3+9=3^0+3^1+3^2$

當$13<n<=40$時

- 最少次數為4次，另發現：$40=1+3+9+27=3^0+3^1+3^2+3^3$

…

所以我們可以歸納出：

當$3^0+3^1+3^2+3^3+,,, +3^{k-1}< n <= 3^0+3^1+3^2+3^3+,,, +3^k$ 時
找出偽幣最少次數為(k+1)次 【n<>1且n<>2】

等比級數求和公式

為更加解答【問題三】，我們需說明等比級數求和公式

一個等比數列，若首項為a_1，公比為r ，則首n項的和

$S_n = na_1$，當$r=1$時

$= a_1(r^n -1)/(r-1)$ 其中$r \neq 1$

【證明】

當$r=1$ 時， $S_n = a_1 + a_1 + a_1 + \cdots + a_1 = na_1$

當$r \neq 1$時， $S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{n-1}$

$rS_n = \quad a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 \cdots + a_1r^n$

將兩式相減得

$(1-r) S_n = a_1 - a_1r^n$

所以$S_n = a_1(1-r^n)/(1-r) = a_1(r^n -1)/(r-1)$

在本次【金幣達人】運用上

$a_1=1$，$r=3$ ，$n=k$

即得 $1+3^1+3^2+3^3+\cdots 3^{k-1} = (3^k-1)/(3-1) = (3^k-1)/2$

為求【問題三】解答，我們的已知與推論

已知一:

當$3^0+3^1+3^2+3^3+,,, \quad +3^{k-1} < n <= 3^0+3^1+3^2+3^3+,,, \quad +3^k$ 時
找出偽幣最少次數為(k+1)次 【n<>1且n<>2】

已知二:

$1+3^1+3^2+3^3+\cdots 3^{k-1}=(3^k-1)/2$

合併上述已知一及已知二，我們可推論得知:

當$3^0+3^1+3^2+3^3+,,, \quad +3^{k-1} < n <= 3^0+3^1+3^2+3^3+,,, \quad +3^k$ 時
找出偽幣最少次數為(k+1)次
亦即 $(3^k-1)/2 < n <= (3^{k+1}-1)/2$ 時
最少次數為(k+1)次 【n<>1且n<>2】

【問題三】最終解答

當$(3^{k}-1)/2 < n <= (3^{k+1}-1)/2$ 時
找出偽幣最少次數為(k+1)次 【n<>1且n<>2】

我們可更改上述結論為：
$(3^{k-1}-1)/2 < n <= (3^{k}-1)/2$ 時
找出偽幣最少次數為 k 次 【n<>1且n<>2】

更白話的說法：
桌上共有n枚金幣，其中有1個金幣是偽幣，但是我們並不知道偽幣比真幣輕還是重？在不考慮運氣的前提下，最少需要秤 k 次，才能找出偽幣。
其中 k 為滿足下列式子之正整數
$(3^{k-1}-1)/2 < n <= (3^{k}-1)/2$ 【n<>1且n<>2】

讓我們回頭用【問題三】解答，去驗證【問題二】

【問題三】解答：

n枚金幣，其中有一為偽幣，但是我們並不知道偽幣比真幣輕還是重？在不考慮運氣的前提下，最少需要秤 k 次，才能找出偽幣。

其中 k 為滿足下列式子之正整數

$(3^{k-1}-1)/2 < n <= (3^k-1)/2$ 【n<>1且n<>2】

If n = 60，k = 5，則$(3^4-1)/2 < 60 <= (3^5-1)/2$ 是否成立？

【驗證】

$3^4 = 81$，$3^5 = 243$

所以$(3^4-1)/2 = 40$，$(3^5-1)/2 = 121$

$40 < 60 <= 121$ 確實成立

【所以60枚金幣，最少需要秤 5 次】