

高愛迪斯第五十三期【數學題目】

夾心數字

姓名：洪子森

班級：資優班五年級 16 號

指導老師：徐若婷

夾心數字

聽說高愛迪斯最喜歡吃的零食就是夾心餅乾了，尤其是仁愛食品公司製作的夾心餅乾更是愛不釋手。在一個陽光燦爛的早上，高愛迪斯突然靈光一閃，就把手上的6塊餅乾編成1-3號各兩塊，並且把它們重新打亂再排成一排，結果居然發現2個編號1的餅乾中間夾了1塊餅乾，2個編號2的餅乾中間夾了2塊餅乾，2個編號3的餅乾中間夾了3塊餅乾(如下圖一所示)，真是太神奇了。高愛迪斯還特別將它們稱為【夾心數字】。可是高愛迪斯並不確定1-10所有的數都能排出夾心數字，像2個1，2個2就無法成功，所以當你無法成功時請詳細說明無法成功的原因。

【圖一】



【問題一】請使用數字1-4各2個，共8個數字，排入下列方格中，並且符合2個1中間夾1個數字，2個2中間夾2個數字，2個3中間夾3個數字，2個4中間夾4個數字(1★)



唯一解答(對稱不算)

原因:

如果把對稱當成同樣情況的話，那把4放入只有兩種可能，接著再放3，然後最後放2和1，用樹狀圖的概念慢慢寫出不同的狀況，最後發現只有唯一一個答案。

為了方便接下來的討論，我用這題當成例子，解釋接下來的符號的意思：

數字	4	1	3	1	2	4	3	2
符號	L4	L1	L3	R1	L2	R4	R3	R2
編號	1	2	3	4	5	6	7	8

符號的標示是因為L=left, R=right, 所以L1代表左邊的1的所在位置編號，也就是L1=2, R1就代表右邊的1的所在位置編號，也就是R1=4, 其餘符號依此類推。因為n=5的狀況實際無法完成，所以把R1-R5和L1-L5寫進去格子內可能會造成誤會，所以就使用1到10的編號來表示。

【問題二】請使用數字1-5各2個，共10個數字，排入下列方格中，並且符合2個1中間夾1個數字，2個2中間夾2個數字，2個3中間夾3個數字，2個4中間夾4個數字，以此類推……(1★)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

無法成功

原因：

可以先把10個格子由左到右編號，如上表，並假設R1表示右邊的1所在位置的編號，L1表示左邊的1所在位置的編號，R2~R5和L2~L5依此類推。

由夾心數字的規則可以知道：

$$R1 - L1 - 1 = 1, R2 - L2 - 1 = 2, R3 - L3 - 1 = 3, R4 - L4 - 1 = 4, R5 - L5 - 1 = 5$$

將上面五個等式相加，可以得到下面的第一式：

$$\text{第一式 } (R1 + R2 + \dots + R5) - (L1 + L2 + \dots + L5) - 5 = 15$$

接著，如果把所有位置的編號加在一起，則可以得到第二式

$$\text{第二式 } (R1 + R2 + \dots + R5) + (L1 + L2 + \dots + L5) = 1 + 2 + \dots + 10 = 55$$

將第二式整理成 $(R1 + R2 + \dots + R5) = 55 - (L1 + L2 + \dots + L5)$ 並代入第一式，可以得到

$$55 - (L1 + L2 + \dots + L5) - (L1 + L2 + \dots + L5) = 20$$

$$\Rightarrow L1 + L2 + \dots + L5 = 17.5$$

可是位置編號都是整數，不可能加起來變成17.5，得到矛盾，所以結論是，1-5的夾心數字不可能成功。

【問題三】請使用數字1-6各2個，共12個數字，排入下列方格中，並且符合2個1中間夾1個數字，2個2中間夾2個數字，2個3中間夾3個數字，2個4中間夾4個數字，以此類推……(1★)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----

無法成功

原因：

與問題二類似，可以先把12個格子由左到右編號，如上表，並假設R1~R6表示右邊的1~6所在位置的編號，L1~L6表示左邊的1~6所在位置的編號。

同理可得下面兩個式子：

$$\text{第一式 } (R1+R2+\dots+R6)-(L1+L2+\dots+L6)-6=21$$

$$\text{第二式 } (R1+R2+\dots+R6)+(L1+L2+\dots+L6)=1+2+\dots+12=78$$

將第二式整理成 $(R1+R2+\dots+R6)=78-(L1+L2+\dots+L6)$ 並代入第一式，可以得到

$$78-(L1+L2+\dots+L6)-(L1+L2+\dots+L6)=27$$

$$\Rightarrow L1+L2+\dots+L6=25.5$$

可是位置編號都是整數，不可能加起來變成25.5，得到矛盾，所以結論是，1-6的夾心數字不可能成功。

【問題四】請使用數字1-7各2個，共14個數字，排入下列方格中，並且符合2個1中間夾1個數字，2個2中間夾2個數字，2個3中間夾3個數字，2個4中間夾4個數字(1★)

⑦	①	④	①	⑥	③	⑤	④	⑦	③	②	⑥	⑤	②
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

原因：

先用問題三的方法檢查：

$$\text{第一式 } (R1+R2+\dots+R7)-(L1+L2+\dots+L7)-7=28$$

$$\text{第二式 } (R1+R2+\dots+R7)+(L1+L2+\dots+L7)=105$$

將第二式整理後代入第一式得 $105-2(L1+\dots+L7)=35$

$$L1+\dots+L7=35 \quad (\text{是整數，所以可能可以找到答案})$$

觀察夾心數字312132和41312432，發現有幾個規律：

〈規律一〉最大的數字放在左邊第一個位置

〈規律二〉數字1放在左邊第二個位置

〈規律三〉數字2放在最右邊的位置

因此我猜測，1-7的夾心數字也可以用這個規律找到答案，於是我就從

7	1	1					7	2			2
---	---	---	--	--	--	--	---	---	--	--	---

開始找答案，經過一些嘗試之後，找到答案

7	1	4	1	6	3	5	4	7	3	2	6	5	2
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

【問題五】請使用數字1-8各2個，共16個數字，排入下列方格中，並且符合2個1中間夾1個數字，2個2中間夾2個數字，2個3中間夾3個數字，2個4中間夾4個數字，以此類推……(1★)

8	1	4	1	6	7	3	4	5	8	3	6	2	7	5	2
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

原因：

先用問題三的方法檢查，可能可以找到答案。

由問題四的規律，我一樣先猜1. 2. 8的位置

8	1		1						8			2			2
---	---	--	---	--	--	--	--	--	---	--	--	---	--	--	---

不過中間的空格太多了，於是我又觀察，發現新的規律：

〈規律四〉兩個1中間的數字大約是最大數字的一半

於是我把兩個1中間放4，接著稍微嘗試了一下就找到答案

8	1	4	1	6	7	3	4	5	8	3	6	2	7	5	2
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

【問題六】請使用數字1-9各2個，共18個數字，排入下列方格中，並且符合2個1中間夾1個數字，2個2中間夾2個數字，2個3中間夾3個數字，2個4中間夾4個數字，以此類推……(1★)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----

無法成功

原因：

與問題二類似，可以先把18個格子由左到右編號，如上表，並假設R1~R9表示右邊的1~9所在位置的編號，L1~L9表示左邊的1~9所在位置的編號。

同理可得下面兩個式子：

$$\text{第一式 } (R_1+R_2+\dots+R_9)-(L_1+L_2+\dots+L_9)-9=45$$

$$\text{第二式 } (R_1+R_2+\dots+R_9)+(L_1+L_2+\dots+L_9)=1+2+\dots+18=171$$

將第二式整理成 $(R_1+R_2+\dots+R_9)=171-(L_1+L_2+\dots+L_9)$ 並代入第一式，可以得到
 $171-(L_1+L_2+\dots+L_9)-(L_1+L_2+\dots+L_9)=54$
 $\Rightarrow L_1+L_2+\dots+L_9=58.5$

可是位置編號都是整數，不可能加起來變成 58.5，得到矛盾，所以結論是，1-9 的夾心數字不可能成功。

【問題七】請使用數字1-10各2個，共20個數字，排入下列方格中，並且符合2個1中間夾1個數字，2個2中間夾2個數字，2個3中間夾3個數字，2個4中間夾4個數字，以此類推……(1★)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

無法成功

原因：

與問題二類似，可以先把20個格子由左到右編號，如上表，並假設 $R_1\sim R_{10}$ 表示右邊的1~10所在位置的編號， $L_1\sim L_{10}$ 表示左邊的1~10所在位置的編號。

同理可得下面兩個式子：

$$\text{第一式 } (R_1+R_2+\dots+R_{10})-(L_1+L_2+\dots+L_{10})-10=55$$

$$\text{第二式 } (R_1+R_2+\dots+R_{10})+(L_1+L_2+\dots+L_{10})=1+2+\dots+20=210$$

將第二式整理成 $(R_1+R_2+\dots+R_{10})=210-(L_1+L_2+\dots+L_{10})$ 並代入第一式，可以得到
 $210-(L_1+L_2+\dots+L_{10})-(L_1+L_2+\dots+L_{10})=65$
 $\Rightarrow L_1+L_2+\dots+L_{10}=72.5$

可是位置編號都是整數，不可能加起來變成 72.5，得到矛盾，所以結論是，1-10 的夾心數字不可能成功。

【問題八】研究結果與發現:(數字排列的技巧、特殊的限制、有無規律…)1★

《研究結果一》數字1-n的夾心數字，當n是4的倍數或者4的倍數加3才可能有解，如果n是4的倍數加1或者4的倍數加2就是不可能成功的。

證明如下：

與問題二類似，可以先把2n個格子由左到右編號，並假設 $R_1\sim R_n$ 表示右邊的1~n所在位

置的編號， $L_1 \sim L_n$ 表示左邊的 $1 \sim n$ 所在位置的編號。

同理可得下面兩個式子：

$$\text{第一式 } (R_1+R_2+\dots+R_n)-(L_1+L_2+\dots+L_n)-n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{第二式 } (R_1+R_2+\dots+R_n)+(L_1+L_2+\dots+L_n)=1+2+\dots+2n=\frac{2n(2n+1)}{2}$$

將第二式整理成 $(R_1+R_2+\dots+R_n)=\frac{2n(2n+1)}{2}-(L_1+L_2+\dots+L_n)$ 並代入第一式，可以得到

$$\frac{2n(2n+1)}{2}-(L_1+L_2+\dots+L_n)-(L_1+L_2+\dots+L_n)=\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$\Rightarrow L_1+L_2+\dots+L_n=\frac{n(3n-1)}{4}$$

接下來檢查看看 $\frac{n(3n-1)}{4}$ 會不會是整數：

狀況一：n是4的倍數

$$\text{假設 } n=4k, \text{ 代入得到 } \frac{4k(12k-1)}{4} = k(12k-1) \text{ 是整數}$$

狀況二：n是4的倍數加1

$$\text{假設 } n=4k+1, \text{ 代入得到 } \frac{(4k+1)(12k+2)}{4} = \frac{(4k+1)(6k+1)}{2} \text{ 不是整數}$$

狀況三：n是4的倍數加2

$$\text{假設 } n=4k+2, \text{ 代入得到 } \frac{(4k+2)(12k+5)}{4} = \frac{(2k+1)(12k+5)}{2} \text{ 不是整數}$$

狀況四：n是4的倍數加3

$$\text{假設 } n=4k+3, \text{ 代入得到 } \frac{(4k+3)(12k+8)}{4} = (4k+3)(3k+2) \text{ 是整數}$$

從以上討論得證。

《研究結果二》我發現以下四個數字規律，可以更容易找到答案。

〈規律一〉最大的數字放在左邊第一個位置

〈規律二〉數字1放在左邊第二個位置

〈規律三〉數字2放在最右邊的位置

〈規律四〉兩個1中間的數字大約是最大數字的一半

《研究結果三》將 $2n$ 個格子切一半，若左半部有 k 對數字，則右半部一定也有 k 對。

例如：

8	1	4	1	6	7	3	4	5	8	3	6	2	7	5	2
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

左半部有一對(數字1)，那右半部就有一對(數字2)

11	1	5	1	9	7	4	8	5	10	6	4	11	7	9	3	8	6	2	3	10	2
----	---	---	---	---	---	---	---	---	----	---	---	----	---	---	---	---	---	---	---	----	---

左半部有兩對(數字1和5)，那右半部就有一對(數字2和3)

【問題九】你能排出10以上的夾心數字嗎?任意排出1個不同的數即獲得1顆星(最多獲得2★)

11	1	5	1	9	7	4	8	5	10	6	4	11	7	9	3	8	6	2	3	10	2
----	---	---	---	---	---	---	---	---	----	---	---	----	---	---	---	---	---	---	---	----	---

12	1	5	1	4	10	7	9	5	4	11	6	8	12	7	3	10	9	6	3	2	8	11	2
----	---	---	---	---	----	---	---	---	---	----	---	---	----	---	---	----	---	---	---	---	---	----	---

解題方法

$n=11$ 的情況討論

觀察可能有解的規則，最左邊放11，接著放1，兩個1中間放11一半左右的數字，最右邊放2，然後兩個2之間有一個位置放10，如下，如果這個狀況找不到答案，那就把兩個1中間的數字改成4或6或7，10的位置也有可能往左移一格，再試試看。

11	1	5	1					5	10			11					2			10	2
----	---	---	---	--	--	--	--	---	----	--	--	----	--	--	--	--	---	--	--	----	---

接著觀察到，左半部有兩個1和兩個5，右半部只有兩個2，表示右半部一定有兩個一樣的數字，可能可以放3或4或7，不過數字越小越有可能，所以我從3開始嘗試，把3放進去可能有下面三種狀況。

11-1

11	1	5	1					5	10			11		3			2	3	10	2
----	---	---	---	--	--	--	--	---	----	--	--	----	--	---	--	--	---	---	----	---

11-2

11	1	5	1					5	10			11	3				3	2		10	2
----	---	---	---	--	--	--	--	---	----	--	--	----	---	--	--	--	---	---	--	----	---

11-3

11	1	5	1					5	10		3	11			3			2		10	2
----	---	---	---	--	--	--	--	---	----	--	---	----	--	--	---	--	--	---	--	----	---

先從 11-1 嘗試，如果不行，再嘗試剩下兩種，考慮 7 有兩種放法。

11-1-1

11	1	5		1			7		5	10			11		7	3			2	3	10	2
----	---	---	--	---	--	--	---	--	---	----	--	--	----	--	---	---	--	--	---	---	----	---

11-1-2

11	1	5	1		7			5	10			11	7		3			2	3	10	2
----	---	---	---	--	---	--	--	---	----	--	--	----	---	--	---	--	--	---	---	----	---

從 11-1-1 的狀況往下寫，可以直接放入 9，然後放 8，接著就會發現 6 不能放了。

11	1	5	1	8		7	9	5	10			11	8	7	3		9	2	3	10	2
----	---	---	---	---	--	---	---	---	----	--	--	----	---	---	---	--	---	---	---	----	---

從 11-1-2 的狀況往下寫，可以直接放入 8，然後放 9，接著放 4 和 6 就完成了。

11	1	5	1	9	7		8	5	10			11	7	9	3	8		2	3	10	2
----	---	---	---	---	---	--	---	---	----	--	--	----	---	---	---	---	--	---	---	----	---

11	1	5	1	9	7	4	8	5	10	6	4	11	7	9	3	8	6	2	3	10	2
----	---	---	---	---	---	---	---	---	----	---	---	----	---	---	---	---	---	---	---	----	---

n=12 的情況討論

觀察可能有解的規則，最左邊放 12，接著放 1，兩個 1 中間放 12 一半左右的數字 6，最右邊放 2，然後兩個 2 之間有一個位置放 11，如下，如果這個狀況找不到答案，那就把兩個 1 中間的數字改成 5 或 7，11 的位置也有可能往左移一格，再試試看。

12	1	6	1							6	11			12						2		11	2
----	---	---	---	--	--	--	--	--	--	---	----	--	--	----	--	--	--	--	--	---	--	----	---

經過一些嘗試之後，一直都找不到答案，我覺得是因為左右連續的空格太多了，為了讓連續的空格減少，我把 6 改成 5 再試試看。

12	1	5	1							5	11			12						2		11	2
----	---	---	---	--	--	--	--	--	--	---	----	--	--	----	--	--	--	--	--	---	--	----	---

接著考慮 10 可以放的地方有四種，是還沒填入的數字中最少種狀況的。

12-1

12	1	5	1	10						5	11			12						2		11	2
----	---	---	---	----	--	--	--	--	--	---	----	--	--	----	--	--	--	--	--	---	--	----	---

12-2

12	1	5	1		10					5	11			12						2		11	2
----	---	---	---	--	----	--	--	--	--	---	----	--	--	----	--	--	--	--	--	---	--	----	---

12-3

12	1	5	1			10				5	11			12						10		2		11	2
----	---	---	---	--	--	----	--	--	--	---	----	--	--	----	--	--	--	--	--	----	--	---	--	----	---

12-4

12	1	5	1				10	5			11			12						10		2		11	2
----	---	---	---	--	--	--	----	---	--	--	----	--	--	----	--	--	--	--	--	----	--	---	--	----	---

先從 12-1 嘗試，如果不行，再嘗試剩下三種，考慮 7 有三種放法。

12-1-1

12	1	5	1	10		7		5			11			12	7	10					2		11	2
----	---	---	---	----	--	---	--	---	--	--	----	--	--	----	---	----	--	--	--	--	---	--	----	---

12-1-2

12	1	5	1	10			5	7	11		12	10	7		2		11	2
----	---	---	---	----	--	--	---	---	----	--	----	----	---	--	---	--	----	---

12-1-3

12	1	5	1	10			5		11	7	12	10			7	2		11	2
----	---	---	---	----	--	--	---	--	----	---	----	----	--	--	---	---	--	----	---

12-1-1 往下考慮 8 有三種放法。

12-1-1-1

12	1	5	1	10		7	8	5		11		12	7	10	8			2		11	2
----	---	---	---	----	--	---	---	---	--	----	--	----	---	----	---	--	--	---	--	----	---

12-1-1-2

12	1	5	1	10		7		5	8	11		12	7	10			8	2		11	2
----	---	---	---	----	--	---	--	---	---	----	--	----	---	----	--	--	---	---	--	----	---

12-1-1-3

12	1	5	1	10		7		5		11		8	12	7	10			2	8	11	2
----	---	---	---	----	--	---	--	---	--	----	--	---	----	---	----	--	--	---	---	----	---

12-1-1-1 往下寫可以直接放 4，然後直接放 3，最後發現 6 和 9 沒辦法同時放入。

12	1	5	1	10	3	7	8	5	3	11		4	12	7	10	8	4		2		11	2
----	---	---	---	----	---	---	---	---	---	----	--	---	----	---	----	---	---	--	---	--	----	---

12-1-1-2 往下寫，把 6 和 9 放進去有四種方法，但這四種方法都無法放入 3。

12		1	5	1	10	6	7	9	5	8	11		6	12	7	10		9	8		2		11	2
----	--	---	---	---	----	---	---	---	---	---	----	--	---	----	---	----	--	---	---	--	---	--	----	---

12	1	5	1	10	6	7		5	8	11	9	6	12	7	10			8		2	9	11	2
----	---	---	---	----	---	---	--	---	---	----	---	---	----	---	----	--	--	---	--	---	---	----	---

12	1	5	1	10		7	9	5	8	11		6	12	7	10		9	8	6	2		11	2
----	---	---	---	----	--	---	---	---	---	----	--	---	----	---	----	--	---	---	---	---	--	----	---

12	1	5	1	10		7		5	8	11	9	6	12	7	10			8	6	2	9	11	2
----	---	---	---	----	--	---	--	---	---	----	---	---	----	---	----	--	--	---	---	---	---	----	---

12-1-1-3 往下寫，可以直接放 4，然後直接放 3，最後發現 6 沒辦法放入。

12	1	5	1	10	3	7		5	3	11	4	8	12	7	10	4			2	8	11	2
----	---	---	---	----	---	---	--	---	---	----	---	---	----	---	----	---	--	--	---	---	----	---

寫到這邊可以確定 12-1-1 是不可能的，接著嘗試 12-1-2，把 9 放入有兩種方法。

12-1-2-1

12	1	5	1	10		9		5	7	11		12		10	9	7		2		11	2
----	---	---	---	----	--	---	--	---	---	----	--	----	--	----	---	---	--	---	--	----	---

12-1-2-2

12	1	5	1	10				5	7	11	9		12		10		7		2	9	11	2
----	---	---	---	----	--	--	--	---	---	----	---	--	----	--	----	--	---	--	---	---	----	---

12-1-2-1 往下寫，填入 3 有兩種，然後都可以繼續填入 4，可是發現某些格不能填 6 和 8。

12	1	5	1	10		9	3	5	7	11	3		12	4	10	9	7		4	2		11	2
----	---	---	---	----	--	---	---	---	---	----	---	--	----	---	----	---	---	--	---	---	--	----	---

12	1	5	1	10		9	4	5	7	11		4	12	3	10	9	7	3		2		11	2
----	---	---	---	----	--	---	---	---	---	----	--	---	----	---	----	---	---	---	--	---	--	----	---

12-1-2-2 往下寫，填入 3 有兩種，然後都可以繼續填入 4，可是發現 6 和 8 填不進去。

12	1	5	1	10				5	7	11	9	3	12	4	10	3	7		4	2	9	11	2
----	---	---	---	----	--	--	--	---	---	----	---	---	----	---	----	---	---	--	---	---	---	----	---

12	1	5	1	10			4	5	7	11	9	4	12	3	10		7	3		2	9	11	2
----	---	---	---	----	--	--	---	---	---	----	---	---	----	---	----	--	---	---	--	---	---	----	---

寫到這邊可以確定 12-1-2 是不可能的，接著嘗試 12-1-3，把 9 放入有兩種方法。

12-1-3-1

12	1	5	1	10		9		5		11	7		12		10	9			7	2		11	2
----	---	---	---	----	--	---	--	---	--	----	---	--	----	--	----	---	--	--	---	---	--	----	---

12-1-3-2

12	1	5	1	10			9	5		11	7		12		10		9		7	2		11	2
----	---	---	---	----	--	--	---	---	--	----	---	--	----	--	----	--	---	--	---	---	--	----	---

12-1-3-1 往下寫，填入 3 和 8 有四種情況，但最後 4 和 6 都無法順利填入。

12	1	5	1	10	3	9		5	3	11	7	8	12		10	9			7	2	8	11		2
----	---	---	---	----	---	---	--	---	---	----	---	---	----	--	----	---	--	--	---	---	---	----	--	---

12	1	5	1	10		9		5		11	7	8	12	3	10	9			3	7	2	8	11	2
----	---	---	---	----	--	---	--	---	--	----	---	---	----	---	----	---	--	--	---	---	---	---	----	---

12	1	5	1	10	8	9		5		11	7		12	8	10	9	3			7	2	3	11	2
----	---	---	---	----	---	---	--	---	--	----	---	--	----	---	----	---	---	--	--	---	---	---	----	---

12	1	5	1	10		9		5	8	11	7		12		10	9	3	8	7	2	3	11	2
----	---	---	---	----	--	---	--	---	---	----	---	--	----	--	----	---	---	---	---	---	---	----	---

12-1-3-2 往下寫，填入 3 和 4 有三種情況，但最後 6 和 8 都無法順利填入。

12	1	5	1	10			9	5	4	11	7	3	12	4	10	3	9			7	2		11	2
----	---	---	---	----	--	--	---	---	---	----	---	---	----	---	----	---	---	--	--	---	---	--	----	---

12	1	5	1	10	3		9	5	3	11	7		12		10	4	9			7	2	4	11	2
----	---	---	---	----	---	--	---	---	---	----	---	--	----	--	----	---	---	--	--	---	---	---	----	---

12	1	5	1	10			9	5		11	7		12	3	10	4	9	3		7	2	4	11	2
----	---	---	---	----	--	--	---	---	--	----	---	--	----	---	----	---	---	---	--	---	---	---	----	---

寫到這邊可以確定 12-1-3 是不可能的，所以 12-1 就完全不可能了。

用一樣的討論方式繼續討論 12-2，放入 8 有三種放法。

12-2

12	1	5	1		10			5		11			12			10				2		11	2
----	---	---	---	--	----	--	--	---	--	----	--	--	----	--	--	----	--	--	--	---	--	----	---

12-2-1

12	1	5	1		10			5		11		8	12			10				2	8	11	2
----	---	---	---	--	----	--	--	---	--	----	--	---	----	--	--	----	--	--	--	---	---	----	---

12-2-2

12	1	5	1		10			5	8	11			12			10		8		2		11	2
----	---	---	---	--	----	--	--	---	---	----	--	--	----	--	--	----	--	---	--	---	--	----	---

12-2-3

12	1	5	1		10	8		5		11			12		8	10				2		11	2
----	---	---	---	--	----	---	--	---	--	----	--	--	----	--	---	----	--	--	--	---	--	----	---

先從 12-2-1 繼續，放入 6 有三種。

12-2-1-1

12	1	5	1		10			5		11	6	8	12			10		6		2	8	11	2
----	---	---	---	--	----	--	--	---	--	----	---	---	----	--	--	----	--	---	--	---	---	----	---

12-2-1-2

12	1	5	1		10		6	5		11		8	12	6		10			2	8	11	2
----	---	---	---	--	----	--	---	---	--	----	--	---	----	---	--	----	--	--	---	---	----	---

12-2-1-3

12	1	5	1	6	10			5		11	6	8	12			10			2	8	11	2
----	---	---	---	---	----	--	--	---	--	----	---	---	----	--	--	----	--	--	---	---	----	---

再從 12-2-1-1 繼續，可以直接放入 3，接著放入 4 有兩種

12-2-1-1-1

12	1	5	1	4	10			5	4	11	6	8	12		3	10		6	3	2	8	11	2
----	---	---	---	---	----	--	--	---	---	----	---	---	----	--	---	----	--	---	---	---	---	----	---

12-2-1-1-2

12	1	5	1		10			5	4	11	6	8	12	4	3	10		6	3	2	8	11	2
----	---	---	---	--	----	--	--	---	---	----	---	---	----	---	---	----	--	---	---	---	---	----	---

最後發現 12-2-1-1-1 可以直接把 7 和 9 放入，得到答案。

12	1	5	1	4	10	7	9	5	4	11	6	8	12	7	3	10	9	6	3	2	8	11	2
----	---	---	---	---	----	---	---	---	---	----	---	---	----	---	---	----	---	---	---	---	---	----	---

證明詳盡
非常棒 %